Analisi Matematica I
Preliminari

Esercizio 1. Determinare estremo superiore e inferiore dei seguenti insiemi

(1) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 10x + 16 \leq 0\}$

(2) $\{x < -2 : x^2 - x - 6 \geq 0\}$

(3) $\left\{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x^2 - 3x + 3 \leq \dfrac{7}{4}\right\}$

(4) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{-x^2+4}{2x^2-x-1} \geq 0\right\}$

(5) $\left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{-x^2-x+2}{x^2-9} \leq 0\right\}$

(6) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{3(x^2-1)} < 5 - x\}$

(7) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{2x+4} > x - 2\}$

(8) $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2-1} > x + 3\}$

(9) $\left\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{5x-2} - \sqrt{x} < -\dfrac{1-3x}{\sqrt{x}}\right\}$

(10) $\{x^2 - 5x + 6 : x \in [0,4]\}$

(11) $\{|x-1| + 2|x| : x \in [-4,2]\}$

(12) $\{x^2 - 5x + 6 : x^2 - 5x + 4 < 0\}$

(13) $\{x^2 - 5x + 4 : \sqrt{2x+4} > x - 2\}$

(14) $\left\{\dfrac{1}{x} : \dfrac{x^2+x-2}{x^2-9} \leq 0\right\}$

(15) $\left\{x \in \mathbb{R} : 3^x > \dfrac{1}{27}\right\}$

(16) $\left\{4^x : 2^x < 40\right\}$

(17) $\left\{x^2 - 1 : \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x^2+2} \leq 15\right\}$

(18) $\left\{x \in \mathbb{R} : 2^{|x-1|} < 2^x\right\}$

(19) $\left\{x > 0 : 3^{|x-1|} > 1\right\}$

(20) $\left\{x \in [-1,3) : \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}\right\}$

(21) $\left\{x < 4 : \dfrac{2^x - 1}{2^x - 3} > 2^x\right\}$

(22) $\left\{x+4 : \left(\frac{1}{2}\right)^{3+x^2} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{4x}\right\}$

(23) $\left\{x^2-3 : \log_5(4|x|-x^2) < 1\right\}$

(24) $\left\{x \in \mathbb{R} : 0 < \log_{10}\left(\frac{x+2}{x+1}\right) < 1\right\}$

(25) $\left\{2^x : \log_{11}(x+5) + \log_{11}(x-2) < \log_{11}(3x-1)\right\}$

(26) $\left\{x \in \mathbb{R} : 2\log_{0,7}(x+1) - \log_{0,7}(x-1) > \log_{0,7}(3x-1)\right\}$

(27) $\left\{x > -4 : \log_{10}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right) > 1\right\}$

(28) $\left\{x \in \mathbb{R} : \log_{10}(2x+1) - \log_{10}(x+3) \leq 1\right\}$

(29) $\left\{x \in \mathbb{R} : \log_{(x+1)}(x^2-4x+5) > 1\right\}$

(30) $\left\{x \in [0, 6\pi] : \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

(31) $\left\{x \in [-\pi, 6\pi] : \cos x = \frac{1}{2}\right\}$

(32) $\left\{x \in [0, 7\pi] : \operatorname{tg} x = \sqrt{3}\right\}$

(33) $\left\{x \in [-\pi, 4\pi] : \sin^2 x + 3\cos^2 x + \sin x - 2 = 0\right\}$

(34) $\left\{x \in [-\pi, 9\pi] : \cos(2x) + 2\sin^2 x + \cos^3 x - 2\cos x - 1 = 0\right\}$

(35) $\left\{x \in [-2\pi, 7\pi] : 1 + \cos^2 x - \sin x = 0\right\}$

(36) $\left\{x \in [-2\pi, 5\pi] : \cos(2x)(\cos^2 x - \sin x - 2) = 0\right\}$

(37) $\left\{x \in [-3\pi, 4\pi] : \cos x + \sin x = \sqrt{2}\right\}$

(38) $\left\{x \in [-4\pi, +\infty) : \cos x + \sqrt{3}\sin x = 0\right\}$

(39) $\left\{x \in [-\pi, \pi] : |\cos x - 1| < \cos x\right\}$

(40) $\left\{x \in [-\pi, \pi] : \cos x + \sqrt{3}\sin x + 1 \geq 0\right\}$

(41) $\left\{x \in [0, 2\pi] : \cos x + \sin(2x) > 0\right\}$

(42) $\left\{x \in [-\pi, \pi] : \frac{2 - \sin x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} > 0\right\}$

(43) $\Big\{x \in [-2\pi, 6\pi] : \sin^2 x + 3\cos^2 x + \sin x - 2 \geq 0\Big\}$

(44) $\Big\{x \in [-\pi, 5\pi] : 2\cos^2 x - \sin(2x) = \sqrt{2} + 1\Big\}$

(45) $\Big\{x \in [-3\pi, 4\pi] : \sqrt{3}\cos x + 3\sin x \geq 0\Big\}$

(46) $\Big\{x \in [-4\pi, 4\pi] : (2 - \sqrt{3})\cos x + \sin x \geq 1\Big\}$

Esercizio 2. Determinare il dominio di definizione delle seguenti funzioni

(1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 4}$

(2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

(3) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$

(4) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x^2 + 4}{2x^2 - x - 1}}$

(5) $f(x) = \sqrt{x - 2|x| + 2}$

(6) $f(x) = \sqrt{\sqrt{2x + 4} - x + 2}$

(7) $f(x) = \sqrt{40 - 2^x}$

(8) $f(x) = \sqrt{\sqrt{3}\cos x + 3\sin x}$

(9) $f(x) = \sqrt{\cos x + \sqrt{3}\sin x + 1}$

(10) $f(x) = \log_3(4x - 1)$

(11) $f(x) = \log_3(x^2 - 2)$

(12) $f(x) = \sqrt{\log_3(x^2 - 2)}$

(13) $f(x) = \log_3(\sqrt{x^2 - 2})$

(14) $f(x) = \log_5(|x + 3| - 2)$

(15) $f(x) = \log_5(x^2 - 2|x| - 3)$

(16) $f(x) = \log_3\left(\sqrt{x^2 - 1} - x - 3\right)$

(17) $f(x) = \log_5\left(5 - x - \sqrt{3(x^2 - 1)}\right)$

(18) $f(x) = \log_3\left(3^x - \dfrac{1}{27}\right)$

(19) $f(x) = \log_5\left(2^x - 2^{|x-1|}\right)$

(20) $f(x) = \log_3\left(\cos x - |\cos x - 1|\right)$

(21) $f(x) = \mathrm{tg}(3x)$

(22) $f(x) = \arcsin\Big(\dfrac{x}{x+2}\Big)$

(23) $f(x) = \arccos\Big(\dfrac{x+1}{x^2-1}\Big)$

(24) $f(x) = \operatorname{arctg}\Big(\dfrac{3x}{x^2-4}\Big)$

(25) $f(x) = \arcsin(x^2 - 5x + 5)$

(26) $f(x) = \arcsin\big(x^2 + |x+1|\big)$

(27) $f(x) = \arccos\big(|2x^2 - 16x + 31|\big)$

(28) $f(x) = \arcsin\big(3^{|x-1|}\big)$

(29) $f(x) = \arcsin\big(\log_5(4|x| - x^2)\big)$

(30) $f(x) = \arcsin\Big(\log_{10}\Big(\dfrac{x+2}{x+1}\Big)\Big)$

Esercizio 3. Calcolare i seguenti numeri complessi

(1) $\dfrac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$

(2) $(-1 + i\sqrt{3})^{60}$

(3) $(2-2i)^7$

(4) $(\sqrt{3} - 3i)^6$

(5) $\Big(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\Big)^{40}$

(6) $\Big(\dfrac{1-i}{1+i}\Big)^{8}$

(7) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$

(8) $\dfrac{(1+i)(3-3i)}{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})^5}$

(9) $\sqrt{i}$

(10) $\sqrt{2 - 2i\sqrt{3}}$

(11) $\sqrt[3]{i}$

(12) $\sqrt[3]{-1+i}$

(13) $\sqrt[4]{-1}$

(14) $\sqrt[4]{-i}$

(15) $\sqrt[4]{1}$

(16) $\sqrt[4]{1-i}$

(17) $\sqrt[5]{\sqrt{3}+i}$

Esercizio 4. Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni

(1) $z^2+4z+5=0$

(2) $z^2+2iz+3=0$

(3) $z^2-2z+1-i=0$

(4) $z^2-2z-i\sqrt{3}=0$

(5) $z^2+2(2\sqrt{3}+i)z+7=0$

(6) $z^3+1=0$

(7) $z^3+z^2+z+1=0$

(8) $z^4-4z^2+8=0$

(9) $z^4-2iz^2-2=0$

(10) $\left(\dfrac{2z+1}{2z-1}\right)^4=1$

(11) $z^5-1=0$

(12) $(z+1)^5-(z-1)^5=0$

(13) $z^6+27=0$

(14) $z^8=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$

Esercizio 5. Utilizzare il principio di induzione per dimostrare le seguenti affermazioni

(1) $\sum_{k=1}^n k \equiv 1+2+\ldots+n=\frac{1}{2}\,n(n+1), \quad \forall n\in\mathbb{N}$

(2) $\sum_{k=1}^n k^2 \equiv 1+2^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1), \quad \forall n\in\mathbb{N}$

(3) $\sum_{k=1}^n k^3 \equiv 1+2^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}\,n^2(n+1)^2, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

(4) $\sum_{k=0}^n q^n \equiv 1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \quad \forall q\neq 1, n\in\mathbb{N}$

(5) $\sum_{k=1}^n (8k-5)=n(4n-1), \quad \forall n\in\mathbb{N}$

(6) $\sum_{k=1}^n (2n+2k-1)=3n^2, \quad \forall n\in\mathbb{N}$

(7) $n!\geq 2^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$

(8) $n!\geq 2\cdot 3^{n-2}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$

Analisi Matematica I
Preliminari (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $x^2 - 10x + 16 \leq 0 \iff 2 \leq x \leq 8$, si ha $\inf A = \min A = 2$, $\sup A = \max A = 8$.

(2) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $x^2 - x - 6 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$, si ha $A = (-\infty, -2)$, per cui $\inf A = -\infty$, $\sup A = -2$.

(3) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $1 \leq x^2 - 3x + 3 \leq \frac{7}{4} \iff \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x + \frac{5}{4} \leq 0 \end{cases} \iff$ $\begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq 2 \\ \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \end{cases} \iff x \in [\frac{1}{2}, 1] \cup [2, \frac{5}{2}]$, si ha $\inf A = \min A = \frac{1}{2}$, $\sup A = \max A = \frac{5}{2}$.

(4) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $-x^2 + 4 \geq 0 \iff x \in [-2, 2]$, e $2x^2 - x - 1 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$, si ha $A = [-2, -\frac{1}{2}) \cup (1, 2]$, per cui $\inf A = \min A = -2$, $\sup A = \max A = 2$.

(5) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $-x^2 - x + 2 \geq 0 \iff x \in [-2, 1]$, e $x^2 - 9 \geq 0 \iff x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$, si ha $A = (-\infty, -3) \cup [-2, 1] \cup (3, +\infty)$, per cui $\inf A = -\infty$, $\sup A = +\infty$.

(6) Indichiamo con A l'insieme proposto. Intanto

$$\sqrt{3(x^2-1)} < 5 - x \iff \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ 5 - x \geq 0 \\ 3x^2 - 3 < (5-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x \leq 5 \\ x^2 + 5x - 14 < 0 \end{cases} \iff x \in (-7, -1] \cup [1, 2).$$

Quindi, si ha $\inf A = -7$, $\sup A = 2$.

(7) Indichiamo con A l'insieme proposto. Intanto

$$\sqrt{2x+4} > x - 2 \iff \begin{cases} x - 2 < 0 \\ 2x + 4 \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x + 4 > (x-2)^2 \end{cases}$$

$$\iff x \in [-2, 2) \bigvee \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x < 0 \end{cases} \iff x \in [-2, 6).$$

Quindi, si ha $\inf A = \min A = -2$, $\sup A = 6$.

(8) Indichiamo con A l'insieme proposto. Intanto

$$\sqrt{x^2-1} > x + 3 \iff \begin{cases} x + 3 < 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ x^2 - 1 > (x+3)^2 \end{cases}$$

$$\iff x \in (-\infty, -3) \bigvee \begin{cases} x \geq -3 \\ 3x + 5 < 0 \end{cases} \iff x \in \Big(-\infty, -\frac{5}{3}\Big).$$

Quindi, si ha $\inf A = -\infty$, $\sup A = -\frac{5}{3}$.

(9) Indichiamo con A l'insieme proposto. Intanto

$$\sqrt{5x-2}-\sqrt{x}<\frac{3x-1}{\sqrt{x}} \iff \begin{cases} x>0 \\ 5x-2\geq 0 \\ \sqrt{x(5x-2)}-x<3x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x\geq \frac{2}{5} \\ \sqrt{x(5x-2)}>4x-1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x\geq \frac{2}{5} \\ 4x-1\geq 0 \\ x(5x-2)<(4x-1)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x\geq \frac{2}{5} \\ 11x^2+10x-1>0 \end{cases} \iff x\in\left[\frac{2}{5},+\infty\right).$$

Quindi, si ha $\inf A=\min A=\frac{2}{5}$, $\sup A=+\infty$.

(10) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x)=x^2-5x+6$, corrispondenti alle ascisse $x\in[0,4]$. Dal grafico della funzione f si deduce che $A=[-\frac{1}{4},6]$, per cui $\inf A=\min A=f(\frac{5}{2})=\frac{1}{4}$, $\sup A=\max A=f(0)=6$.

(11) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x)=|x-1|+2|x|$, corrispondenti alle ascisse $x\in[-4,2]$. Dal grafico della funzione f si deduce che $A=[1,13]$, per cui $\inf A=\min A=f(0)=1$, $\sup A=\max A=f(-4)=13$.

(12) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x)=x^2-5x+6$, corrispondenti alle ascisse x che soddisfano la condizione $x^2-5x+4<0$, cioè $x\in(1,4)$. Dal grafico della funzione f si deduce che $A=[\frac{1}{4},2)$, per cui $\inf A=\min A=f(\frac{5}{2})=-\frac{1}{4}$, $\sup A=2$.

(13) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x)=x^2-5x+4$, corrispondenti alle ascisse x che soddisfano la condizione $\sqrt{2x+4}>x-2$, cioè $x\in[-2,6)$ (vedi lo svolgimento dell'esercizio 7). Dal grafico della funzione f si deduce che $A=[-\frac{9}{4},18]$, per cui $\inf A=\min A=f(\frac{5}{2})=-\frac{9}{4}$, $\sup A=\max A=f(-2)=18$.

(14) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x)=\frac{1}{x}$, corrispondenti alle ascisse x che soddisfano la condizione $\frac{x^2+x-2}{x^2-9}\leq 0$, cioè $x\in(-3,-2]\cup[1,3)$. Dal grafico della funzione f si deduce che $A=[-\frac{1}{2},-\frac{1}{3})\cup(\frac{1}{3},1]$, per cui $\inf A=\min A=f(-2)=-\frac{1}{2}$, $\sup A=\max A=f(1)=1$.

(15) Indichiamo con A l'insieme proposto. Intanto, essendo $z\mapsto\log_3 z$ (strettamente) crescente, si ha $3^x>\frac{1}{27}\iff x>\log_3\frac{1}{27}=-3$. Quindi, si ha $\inf A=-3$, $\sup A=+\infty$.

(16) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x)=4^x$, corrispondenti alle ascisse x che soddisfano la condizione $2^x<40$. Intanto, essendo $z\mapsto\log_2 z$ (strettamente) crescente, si ha $2^x<40\iff x<\log_2 40$, cioè $\operatorname{dom} f=(-\infty,\log_2 40)$. Inoltre, essendo $z\mapsto 4^z$ (strettamente) crescente, si ha $x<\log_2 40\iff 4^x<4^{\log_2 40}=2^{2\log_2 40}=40^2$. Quindi, essendo $A=\operatorname{im} f=(-\infty,40^2)$, si ha $\inf A=-\infty$, $\sup A=40^2=1600$.

(17) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x)=x^2-1$, corrispondenti alle ascisse x che soddisfano la condizione $(\frac{1}{4})^{x^2+2}\leq 15$. Poiché $z\mapsto\log_{1/4} z$ è (strettamente) decrescente, si ha $(\frac{1}{4})^{x^2+2}\leq 15\iff x^2+2\geq\log_{1/4}15=-\log_4 15\iff x^2\geq -2-\log_4 15<0$, cioè $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}$. Quindi, essendo $A=\operatorname{im} f=[-1,+\infty)$, si ha $\inf A=\min A=-1$, $\sup A=+\infty$.

(18) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $z \mapsto \log_2 z$ è (strettamente) crescente, si ha

$$\begin{aligned} 2^{|x-1|} < 2^x &\iff |x-1| < x \\ &\iff \begin{cases} x-1<0 \\ -(x-1)<x \end{cases} \bigvee \begin{cases} x-1\geq 0 \\ x-1<x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x<1 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases} \bigvee \begin{cases} x\geq 1 \\ x \text{ qualunque} \end{cases} \\ &\iff x > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Quindi, si ha $\inf A = \frac{1}{2}$, $\sup A = +\infty$.

(19) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $z \mapsto \log_3 z$ è (strettamente) crescente, si ha $3^{|x-1|} > 1 \iff |x-1| > 0 \iff x \neq 1$. Quindi, essendo $A = (0,1) \cup (1,+\infty)$, si ha $\inf A = 0$, $\sup A = +\infty$.

(20) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $z \mapsto \log_{1/2} z$ è (strettamente) decrescente, si ha $(\frac{1}{2})^{x-2} > (\frac{1}{2})^{x^2} \iff x-2 < x^2 \iff x^2-x+2>0$, e poiché $x^2-x+2=0 \iff x = \frac{1\pm\sqrt{1-8}}{2} \notin \mathbb{R}$, si ha $x^2-x+2>0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi la disequazione proposta ha soluzione per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi, essendo $A = [-1,3)$, si ha $\inf A = \min A = -1$, $\sup A = 3$.

(21) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\frac{2^x-1}{2^x-3} > 2^x \iff \begin{cases} z = 2^x \\ \dfrac{z-1}{z-3} > z. \end{cases}$$

Poiché

$$\frac{z-1}{z-3} > z \iff \frac{z-1-z(z-3)}{z-3} > 0 \iff \frac{z^2-4z+1}{z-3} < 0$$

e $z^2-4z+1=0 \iff z = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}$, si ha

$$\frac{z-1}{z-3} > z \iff z < 2-\sqrt{3} \bigvee 3 < z < 2+\sqrt{3}.$$

Poiché $z \mapsto \log_2 z$ è (strettamente) crescente, si ha

$$\begin{aligned} \frac{2^x-1}{2^x-3} > 2^x &\iff 2^x < 2-\sqrt{3} \bigvee 3 < 2^x < 2+\sqrt{3} \\ &\iff x < \log_2(2-\sqrt{3}) \bigvee \log_2 3 < x < \log_2(2+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Quindi, essendo $A = \big(-\infty, \log_2(2-\sqrt{3})\big) \cup \big(\log_2 3, \log_2(2+\sqrt{3})\big)$, si ha $\inf A = -\infty$, $\sup A = \log_2(2+\sqrt{3})$.

(22) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x) = x+4$, corrispondenti alle ascisse x che soddisfano la condizione $(\frac{1}{2})^{3+x^2} \geq (\frac{1}{2})^{4x}$. Poiché $z \mapsto \log_{1/2} z$ è (strettamente) decrescente, si ha $(\frac{1}{2})^{3+x^2} \geq (\frac{1}{2})^{4x} \iff 3+x^2 \leq 4x \iff x^2-4x+3 \leq 0$, e poiché $x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x = 2 \pm \sqrt{4-3} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$, si ha $x^2 - 4x + 3 \leq 0 \iff 1 \leq x \leq 3$. Quindi la disequazione proposta ha soluzione $\iff 1 \leq x \leq 3$. Quindi, essendo $A = \operatorname{im} f = [5, 7]$, si ha $\inf A = \min A = 5$, $\sup A = \max A = 7$.

(23) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x) = x^2 - 3$, corrispondenti alle ascisse x che soddisfano la condizione $(\frac{1}{2})^{3+x^2} \geq (\frac{1}{2})^{4x}$. Poiché $z \mapsto \log_5 z$ è (strettamente) crescente, si ha

$$\begin{aligned} \log_5(4|x| - x^2) < 1 &\iff 0 < 4|x| - x^2 < 5 \\ &\iff \begin{cases} z = |x| \\ z^2 - 4z < 0 \\ z^2 - 4z + 5 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = |x| \\ 0 < z < 4 \\ z \text{ qualunque} \end{cases} \\ &\iff x \in (-4, 0) \cup (0, 4). \end{aligned}$$

Quindi, essendo $A = \operatorname{im} f = (-3, 13]$, si ha $\inf A = -3$, $\sup A = \max A = 13$.

(24) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $z \mapsto 10^z$ è (strettamente) crescente, si ha

$$\begin{aligned} 0 < \log_{10} \frac{x+2}{x+1} < 1 &\iff 1 < \frac{x+2}{x+1} < 10 \iff \begin{cases} \frac{x+2}{x+1} - 1 > 0 \\ \frac{x+2}{x+1} - 10 < 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{1}{x+1} > 0 \\ \frac{-9x-8}{x+1} < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 1 > 0 \\ -9x - 8 < 0 \end{cases} \\ &\iff x > -\frac{8}{9}. \end{aligned}$$

Quindi, essendo $A = (-\frac{8}{9}, +\infty)$, si ha $\inf A = -\frac{8}{9}$, $\sup A = +\infty$.

(25) Indichiamo con A l'insieme proposto, e osserviamo che esso consiste nelle ordinate della funzione $f(x) = 2^x$, corrispondenti alle ascisse x che soddisfano la condizione $\log_{11}(x + 5) + \log_{11}(x - 2) < \log_{11}(3x - 1)$. Poiché $z \mapsto 11^z$ è (strettamente) crescente, si ha

$$\begin{aligned} \log_{11}(x + 5) + \log_{11}(x - 2) < \log_{11}(3x - 1) &\iff \begin{cases} x + 5 > 0 \\ x - 2 > 0 \\ 3x - 1 > 0 \\ (x + 5)(x - 2) < 3x - 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x > 2 \\ x^2 + 5x - 2x - 10 - 3x + 1 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 9 < 0 \end{cases} \\ &\iff 2 < x < 3. \end{aligned}$$

Quindi, essendo $A = \operatorname{im} f = (4, 8)$, si ha $\inf A = 4$, $\sup A = 8$.

(26) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $z \mapsto (0,7)^z$ è (strettamente) decrescente, si ha

$$2\log_{0,7}(x+1) - \log_{0,7}(x-1) > \log_{0,7}(3x-1) \iff \begin{cases} x+1>0 \\ x-1>0 \\ 3x-1>0 \\ (x+1)^2 < (3x-1)(x-1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x>1 \\ x^2+2x+1-3x^2+x+3x-1<0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>1 \\ -2x^2+6x<0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x>1 \\ x<0 \vee x>3 \end{cases} \iff x>3.$$

Quindi, essendo $A = (3, +\infty)$, si ha $\inf A = 3$, $\sup A = +\infty$.

(27) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $z \mapsto 10^z$ è (strettamente) crescente, si ha

$$\log_{10}\frac{2x+1}{x+3} > 1 \iff \frac{2x+1}{x+3} > 10 \iff \frac{-8x-29}{x+3} > 0 \iff x \in \Big(-\frac{29}{8}, -3\Big).$$

Quindi, si ha $\inf A = -\frac{29}{8}$, $\sup A = -3$.

(28) Indichiamo con A l'insieme proposto. Poiché $z \mapsto 10^z$ è (strettamente) crescente, si ha

$$\log_{10}(2x+1) - \log_{10}(x+3) \le 1 \iff \begin{cases} 2x+1>0 \\ x+3>0 \\ \dfrac{2x+1}{x+3} \le 10 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x>-\frac{1}{2} \\ \\ \dfrac{-8x-29}{x+3} \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>-\frac{1}{2} \\ -8x-29 \le 0 \end{cases}$$

$$\iff x > -\frac{1}{2}.$$

Quindi, si ha $\inf A = -\frac{1}{2}$, $\sup A = +\infty$.

(29) Indichiamo con A l'insieme proposto. Osserviamo dapprima che il dominio naturale della funzione $x \mapsto \log_{(x+1)}(x^2-4x+5)$ è $\begin{cases} x^2-4x+5>0 \\ x+1>0 \end{cases} \iff x > -1$, e quindi, per ogni $x > -1$, si ha

$$\log_{(x+1)}(x^2-4x+5) > 1 \iff \frac{\log_2(x^2-4x+5)}{\log_2(x+1)} > 1$$

$$\iff \frac{\log_2(x^2-4x+5) - \log_2(x+1)}{\log_2(x+1)} > 0 \iff \frac{\log_2 \dfrac{x^2-4x+5}{x+1}}{\log_2(x+1)} > 0.$$

Ora $\log_2 \dfrac{x^2-4x+5}{x+1} \geq 0 \iff \dfrac{x^2-4x+5}{x+1} \geq 1 \iff \dfrac{x^2-5x+4}{x+1} \geq 0 \iff -1 < x \leq 1 \bigvee x \geq 4$, e $\log_2(x+1) > 0 \iff x+1 > 1 \iff x > 0$, per cui

$$\log_{(x+1)}(x^2-4x+5) > 1 \iff 0 < x < 1 \bigvee x > 4.$$

Quindi, si ha $\inf A = 0$, $\sup A = +\infty$.

(30) Indichiamo con A l'insieme proposto. Ricordando che $\sin x = \sin(\pi - x)$, si ha $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ Quindi, $A = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{17\pi}{4}, \frac{19\pi}{4}\right\}$, per cui si ha $\inf A = \min A = \frac{\pi}{4}$, $\sup A = \max A = \frac{19\pi}{4}$.

(31) Indichiamo con A l'insieme proposto. Ricordando che $\cos x = \cos(-x)$, si ha $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Quindi, $A = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{17\pi}{3}\right\}$, per cui si ha $\inf A = \min A = -\frac{\pi}{3}$, $\sup A = \max A = \frac{17\pi}{3}$.

(32) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \iff x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Quindi, $A = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \frac{13\pi}{3}, \frac{16\pi}{3}, \frac{19\pi}{3}\right\}$, per cui si ha $\inf A = \min A = \frac{\pi}{3}$, $\sup A = \max A = \frac{19\pi}{3}$.

(33) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\sin^2 x + 3\cos^2 x + \sin x - 2 = 0 \iff -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$$

$$\iff \begin{cases} z = \sin x \\ 2z^2 - z - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = \sin x \\ z = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\iff x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \bigvee x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \bigvee x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Quindi, $A = \left\{-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}, \frac{19\pi}{6}, \frac{23\pi}{6}\right\}$, per cui si ha $\inf A = \min A = -\frac{\pi}{6}$, $\sup A = \max A = \frac{23\pi}{6}$.

(34) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\begin{aligned} &\cos 2x + 2\sin^2 x + \cos^3 x - 2\cos x - 1 = 0 \\ &\quad\iff 2\cos^2 x - 1 + 2 - 2\cos^2 x + \cos^3 x - 2\cos x - 1 = 0 \\ &\quad\iff \cos^3 x - 2\cos x = 0 \iff \begin{cases} z = \cos x \\ z^3 - 2z = 0 \end{cases} \\ &\quad\iff \begin{cases} z = \cos x \\ z = 0 \vee z = \pm\sqrt{2} \end{cases} \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Quindi, $A = \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, \frac{15\pi}{2}, \frac{17\pi}{2}\right\}$, per cui si ha $\inf A = \min A = -\frac{\pi}{2}$, $\sup A = \max A = \frac{17\pi}{2}$.

(35) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$1+\cos^2 x-\sin x=0 \iff 2-\sin^2 x-\sin x=0$$
$$\iff \begin{cases} z=\sin x \\ z^2+z-2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=\sin x \\ z=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases}-2\\ 1\end{cases}\end{cases}$$
$$\iff x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Quindi, $A=\left\{-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{9\pi}{2},\frac{13\pi}{2}\right\}$, per cui si ha $\inf A=\min A=-\frac{3\pi}{2}$, $\sup A=\max A=\frac{13\pi}{2}$.

(36) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\cos(2x)\big(\cos^2 x-\sin x-2\big)=0 \iff \cos(2x)=0 \bigvee -\sin^2 x-\sin x-1=0$$
$$\iff 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \bigvee \begin{cases} z=\sin x \\ z^2+z+1=0 \end{cases} \iff x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z} \bigvee \begin{cases} z=\sin x \\ z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}\notin\mathbb{R}, \end{cases}$$

e quindi l'equazione proposta ha solo le soluzioni $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. Quindi, $A=\{\frac{(2k+1)\pi}{4}:k\in\mathbb{Z},k=-3,\dots,9\}$, per cui si ha $\inf A=\min A=-\frac{7\pi}{4}$, $\sup A=\max A=\frac{19\pi}{4}$.

(37) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\cos x+\sin x=\sqrt{2} \iff \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=1$$
$$\iff \sin\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big)=1 \iff x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\iff x=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Quindi, $A=\left\{-\frac{7\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right\}$, per cui si ha $\inf A=\min A=-\frac{7\pi}{4}$, $\sup A=\max A=\frac{9\pi}{4}$.

(38) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\cos x+\sqrt{3}\sin x=0 \iff \frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=0$$
$$\iff \sin\Big(x+\frac{\pi}{6}\Big)=0 \iff x+\frac{\pi}{6}=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\iff x=-\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Quindi, $A=\left\{\frac{(6k-1)\pi}{6}:k\in\mathbb{Z},k\geq -3\right\}$, per cui si ha $\inf A=\min A=-\frac{19\pi}{6}$, $\sup A=+\infty$.

(39) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha $|\cos x-1|<\cos x \iff 1-\cos x<\cos x \iff \cos x>\frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$, mod 2π. Quindi, $A=\big(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\big)$, per cui si ha $\inf A=-\frac{\pi}{3}$, $\sup A=\frac{\pi}{3}$.

(40) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\sqrt{3}\sin x + \cos x + 1 \geq 0 \iff \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x \geq -\frac{1}{2} \iff \sin\Big(x + \frac{\pi}{6}\Big) \geq -\frac{1}{2}$$
$$\iff -\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}, \quad \bmod 2\pi \iff -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi, \quad \bmod 2\pi.$$

Quindi, $A = \big[-\frac{\pi}{3}, \pi\big]$, per cui si ha $\inf A = \min A = -\frac{\pi}{3}$, $\sup A = \max A = \pi$.

(41) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha $\cos x + \sin 2x > 0 \iff \cos x(1 + 2\sin x) > 0$.
Ora $\cos x \geq 0 \iff -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\bmod 2\pi$, e
$1 + 2\sin x \geq 0 \iff \sin x \geq -\frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$, $\bmod 2\pi$.
Quindi $\cos x + \sin 2x > 0 \iff -\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2} \bigvee \frac{7\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$, $\bmod 2\pi$.
Quindi, $A = \big(\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\big)$, per cui si ha $\inf A = \frac{7\pi}{6}$, $\sup A = \frac{3\pi}{2}$.

(42) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$2 - \sin x - \sin^2 x > 0 \iff \begin{cases} z = \sin x \\ z^2 + z - 2 < 0 \end{cases} \overset{(a)}{\iff} \begin{cases} z = \sin x \\ -2 < z < 1 \end{cases}$$
$$\iff x \neq \frac{\pi}{2} \quad \bmod 2\pi,$$

dove in (a) si è usato il risultato $z^2 + z - 2 = 0 \iff z = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} -2 \\ 1. \end{cases}$
Inoltre $\sin x \cos x > 0 \iff \sin 2x > 0 \iff 0 < 2x < \pi$, $\bmod 2\pi \iff 0 < x < \frac{\pi}{2}$, $\bmod \pi$.
Quindi

$$\frac{2 - \sin x - \sin^2 x}{\cos x \sin x} > 0 \iff 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad \bmod \pi.$$

Quindi, $A = \big(-\pi, -\frac{\pi}{2}\big) \cup \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$, per cui si ha $\inf A = -\pi$, $\sup A = \frac{\pi}{2}$.

(43) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\sin^2 x + 3\cos^2 x + \sin x - 2 \geq 0 \iff \sin^2 x + 3 - 3\sin^2 x + \sin x - 2 \geq 0$$
$$\iff -2\sin^2 x + \sin x + 1 \geq 0 \iff 2\sin^2 x - \sin x - 1 \leq 0$$
$$\iff \begin{cases} z = \sin x \\ 2z^2 - z - 1 \leq 0 \end{cases} \overset{(a)}{\iff} \begin{cases} z = \sin x \\ -\frac{1}{2} \leq z \leq 1 \end{cases}$$
$$\iff -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}, \quad \bmod 2\pi,$$

dove in (a) si è usato il risultato $2z^2 - z - 1 = 0 \iff z = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1. \end{cases}$ Quindi, $A = \big[-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\big] \cup \big[\frac{11\pi}{6}, \frac{19\pi}{6}\big] \cup \big[\frac{23\pi}{6}, \frac{31\pi}{6}\big]$, per cui si ha $\inf A = \min A = -\frac{\pi}{6}$, $\sup A = \max A = \frac{31\pi}{6}$.

(44) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{2}+1 &\iff 1+\cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2}+1 \\ &\iff \cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2} \iff \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x = 1 \\ &\iff \cos\Big(2x+\frac{\pi}{4}\Big) = 1 \iff 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \\ &\iff x = -\frac{\pi}{8} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Quindi, $A = \big\{-\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}, \frac{23\pi}{8}, \frac{31\pi}{8}, \frac{39\pi}{8}\big\}$, per cui si ha $\inf A = \min A = -\frac{\pi}{8}$, $\sup A = \max A = \frac{39\pi}{8}$.

(45) Indichiamo con A l'insieme proposto. Si ha

$$\begin{aligned} 3\sin x + \sqrt{3}\cos x \ge 0 &\iff \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x \ge 0 \iff \sin\Big(x+\frac{\pi}{6}\Big) \ge 0 \\ &\iff 0 \le x + \frac{\pi}{6} \le \pi, \quad \text{mod } 2\pi \iff -\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{5\pi}{6}, \quad \text{mod } 2\pi. \end{aligned}$$

Quindi, $A = \big[-\frac{13\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}\big] \cup \big[-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\big] \cup \big[\frac{11\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}\big]$, per cui si ha $\inf A = \min A = -\frac{13\pi}{6}$, $\sup A = \max A = \frac{17\pi}{6}$.

(46) Indichiamo con A l'insieme proposto. Usando le espressioni di seno e coseno in funzione della tangente dell'arco-metà (e avendo verificato che $x = \pi \mod 2\pi$ non è soluzione dell'equazione assegnata), si ha

$$\begin{aligned} \sin x + (2-\sqrt{3})\cos x - 1 \ge 0 &\iff \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} + (2-\sqrt{3})\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}} - 1 \ge 0 \\ &\iff 2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + (2-\sqrt{3})(1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}) - 1 - \mathrm{tg}^2\frac{x}{2} \ge 0 \\ &\iff (3-\sqrt{3})\,\mathrm{tg}^2\frac{x}{2} - 2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} + \sqrt{3} - 1 \le 0 \\ &\overset{(a)}{\iff} \frac{\sqrt{3}}{3} \le \mathrm{tg}\,\frac{x}{2} \le 1 \iff \frac{\pi}{6} \le \frac{x}{2} \le \frac{\pi}{4}, \quad \text{mod } \pi \\ &\iff \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad \text{mod } 2\pi, \end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il risultato $(3-\sqrt{3})z^2 - 2z + \sqrt{3} - 1 = 0 \iff z = \frac{1\pm\sqrt{1-(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}}{3-\sqrt{3}} = \frac{1\pm\sqrt{1-3\sqrt{3}+3+3-\sqrt{3}}}{3-\sqrt{3}} = \frac{1\pm\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{3-\sqrt{3}} = \frac{1\pm(2-\sqrt{3})}{3-\sqrt{3}} = \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = 1. \end{cases}$

Quindi, $A = \big[-\frac{11\pi}{3}, -\frac{7\pi}{2}\big] \cup \big[-\frac{5\pi}{3}, -\frac{3\pi}{2}\big] \cup \big[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\big] \cup \big[\frac{7\pi}{3}, \frac{5\pi}{2}\big]$, per cui si ha $\inf A = \min A = -\frac{11\pi}{3}$, $\sup A = \max A = \frac{5\pi}{2}$.

□

Svolgimento esercizio 2

(1) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff x^2+5x+4 \geq 0 \iff x \in (-\infty,-4] \cup [-1,+\infty)$.

(2) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff x^2-2x+1 \geq 0 \iff x \in \mathbb{R}$.

(3) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff 2-x^2 \geq 0 \iff x \in [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

(4) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff \frac{4-x^2}{2x^2-x-1} \geq 0 \iff x \in [-2,-\frac{1}{2}) \cup (1,2]$.

(5) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff x-2|x|+2 \geq 0 \iff \begin{cases} x<0 \\ 3x+2 \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \iff$ $\begin{cases} x<0 \\ x \geq -\frac{2}{3} \end{cases} \bigvee \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 2 \end{cases} \iff -\frac{2}{3} \leq x \leq 2$.

(6) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff \sqrt{2x+4} \geq x-2 \iff \begin{cases} x-2<0 \\ 2x+4 \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 2x+4 \geq (x-2)^2 \end{cases}$ $\iff x \in [-2,2) \bigvee \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-6x \leq 0 \end{cases} \iff x \in [-2,6]$.

(7) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff 40-2^x \geq 0 \iff x \leq \log_2 40$.

(8) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff 3\sin x+\sqrt{3}\cos x \geq 0 \iff \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x \geq 0 \iff \sin\Big(x+\frac{\pi}{6}\Big) \geq 0 \iff 0 \leq x+\frac{\pi}{6} \leq \pi, \mod 2\pi \iff -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}, \mod 2\pi$.

(9) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff \sqrt{3}\sin x+\cos x+1 \geq 0 \iff \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x \geq -\frac{1}{2} \iff \sin\Big(x+\frac{\pi}{6}\Big) \geq -\frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{6} \leq x+\frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}, \mod 2\pi \iff -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi, \mod 2\pi$.

(10) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff 4x-1>0 \iff x>\frac{1}{4}$.

(11) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff x^2-2>0 \iff x \in (-\infty,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},+\infty)$.

(12) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff \log_3(x^2-2) \geq 0 \iff x^2-2 \geq 1 \iff x \in (-\infty,-\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3},+\infty)$.

(13) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff \sqrt{x^2-2}>0 \iff x^2-2>0 \iff \in (-\infty,-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2},+\infty)$.

(14) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff |x+3|-2>0 \iff \begin{cases} x+3<0 \\ -(x+3)-2>0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ (x+3)-2>0 \end{cases} \iff$ $\begin{cases} x<-3 \\ x<-5 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x \geq -3 \\ x>-1 \end{cases} \iff x<-5 \vee x>-1$.

(15) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff x^2-2|x|-3>0 \iff \begin{cases} z=|x| \\ z^2-2z-3>0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=|x| \\ z<-1 \vee z>3 \end{cases} \iff$ $|x|>3$.

(16) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff \sqrt{x^2-1}>x+3 \iff \begin{cases} x+3<0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2-1>(x+3)^2. \end{cases}$ Poiché $x^2-1>(x+3)^2 \iff x^2-1-x^2-6x-9>0 \iff 3x+5<0$, si ha $\sqrt{x^2+1}<x+3 \iff \begin{cases} x<-3 \\ x \leq -1 \text{ oppure } x \geq 1 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x \geq -3 \\ x<-\frac{5}{3} \end{cases} \iff x<-\frac{5}{3}$.

(17) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff \sqrt{3(x^2-1)} < 5-x \iff \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ 3x^2-3 < (5-x)^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x \leq 5 \\ x^2+5x-14 < 0 \end{cases}$

$\iff x \in (-7,-1] \cup [1,2)$.

(18) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff 3^x > \frac{1}{27} \iff x > -3$.

(19) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff 2^x - 2^{|x-1|} > 0 \iff 2^{|x-1|} < 2^x \iff |x-1| < x \iff \begin{cases} x-1 < 0 \\ -(x-1) < x \end{cases} \bigvee \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 < x \end{cases} \iff \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \bigvee \begin{cases} x \geq 1 \\ x \text{ qualunque} \end{cases} \iff x > \frac{1}{2}$.

(20) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff |\cos x - 1| < \cos x \iff 1 - \cos x < \cos x \iff \cos x > \frac{1}{2} \iff -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}, \mod 2\pi$.

(21) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

(22) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff -1 \leq \frac{x}{x+2} \leq 1 \iff \begin{cases} \frac{2x+2}{x+2} \geq 0 \\ \frac{2}{x+2} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2 > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \iff x \geq -1$.

(23) Osserviamo che $f(x) = \arccos\left(\frac{1}{x-1}\right), x \neq -1$. Si ha, per ogni $x \neq -1$, che $x \in \operatorname{dom} f \iff -1 \leq \frac{1}{x-1} \leq 1 \iff \begin{cases} \frac{x}{x-1} \geq 0 \\ \frac{x-2}{x-1} \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty) \\ x \in (-\infty,1) \cup (2,+\infty) \end{cases} \iff x \in (-\infty,0) \cup (2,+\infty)$, e quindi $\operatorname{dom} f = (-\infty,-1) \cup (-1,0) \cup (2,+\infty)$.

(24) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff x \neq \pm 2$.

(25) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff -1 \leq x^2-5x+5 \leq 1 \iff \begin{cases} x^2-5x+6 \geq 0 \\ x^2-5x+4 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty,2] \cup [3,+\infty) \\ x \in [1,4] \end{cases}$

$x \in [1,2] \cup [3,4]$.

(26) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff -1 \leq x^2+|x+1| \leq 1 \iff \begin{cases} x+1 < 0 \\ x^2-(x+1) \leq 1 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2+(x+1) \leq 1 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} x < -1 \\ x^2-x-2 \leq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2+x \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1 \\ -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \iff x \in [-1,0]$.

(27) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff -1 \leq |2x^2-16x+31| \leq 1 \iff -1 \leq 2x^2-16x+31 \leq 1 \iff \begin{cases} 2x^2-16x+32 \geq 0 \\ 2x^2-16x+30 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x-4)^2 \geq 0 \\ 2(x^2-8x+15) \leq 0 \end{cases} \iff x \in [3,5]$.

(28) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff -1 \leq 3^{|x-1|} \leq 1 \iff |x-1| \leq 0 \iff x = 1$.

(29) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff -1 \leq \log_5(4|x|-x^2) \leq 1 \iff \frac{1}{5} \leq 4|x|-x^2 \leq 5 \iff \begin{cases} z = |x| \\ z^2-4z+\frac{1}{5} \leq 0 \\ z^2-4z+5 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = |x| \\ 2-\sqrt{\frac{19}{5}} \leq z \leq 2+\sqrt{\frac{19}{5}} \\ z \text{ qualunque} \end{cases} \iff x \in \left[-2-\sqrt{\frac{19}{5}}, -2+\sqrt{\frac{19}{5}}\right] \cup \left[2-\sqrt{\frac{19}{5}}, 2+\sqrt{\frac{19}{5}}\right]$.

(30) Si ha $x \in \operatorname{dom} f \iff -1 \le \log_{10} \frac{x+2}{x+1} \le 1 \iff \frac{1}{10} \le \frac{x+2}{x+1} \le 10 \iff \begin{cases} \frac{x+2}{x+1} - \frac{1}{10} \ge 0 \\ \frac{x+2}{x+1} - 10 \le 0 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} \frac{9x+19}{10(x+1)} \ge 0 \\ \frac{9x+8}{x+1} \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty, -\frac{19}{9}] \cup (-1, +\infty) \\ x \in (-\infty, -1) \cup [-\frac{8}{9}, +\infty) \end{cases} \iff x \in (-\infty, -\frac{19}{9}] \cup [-\frac{8}{9}, +\infty).$

□

Svolgimento esercizio 3

(1) Si ha $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2} = \frac{1+4i-4-1+3i+3-i}{27+54i-36-8i-4-4i+1} = \frac{-1+6i}{-12+42i} = \frac{(1-6i)(2+7i)}{6\cdot 53} = \frac{44-5i}{318}$.

(2) Poiché $|-1+i\sqrt{3}| = 2$, $\operatorname{Arg}(-1+i\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$, si ha $(-1+i\sqrt{3})^{60} = 2^{60}\big(\cos(60\frac{2\pi}{3}) + i\sin(60\frac{2\pi}{3})\big) = 2^{60}$.

(3) Poiché $|2-2i| = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}(2-2i) = -\frac{\pi}{4}$, si ha $(2-2i)^7 = 2^{10}\sqrt{2}\big(\cos(-\frac{7\pi}{4}) + i\sin(-\frac{7\pi}{4})\big) = 2^{10}\sqrt{2}\big(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\big)$.

(4) Poiché $|\sqrt{3}-3i| = 2\sqrt{3}$, $\operatorname{Arg}(\sqrt{3}-3i) = -\frac{\pi}{3}$, si ha $(\sqrt{3}-3i)^6 = 2^6\cdot 3^3\big(\cos(-\frac{6\pi}{3}) + i\sin(-\frac{6\pi}{3})\big) = 2^6\cdot 3^3$.

(5) Poiché $\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12}$, si ha $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40} = 2^{20}\big(\cos(40\frac{7\pi}{12}) + i\sin(40\frac{7\pi}{12})\big) = -2^{20}\big(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\big)$.

(6) Poiché $\left|\frac{1-i}{1+i}\right| = 1$, $\operatorname{Arg}\left(\frac{1-i}{1+i}\right) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$, si ha $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8 = \big(\cos(-\frac{8\pi}{2}) + i\sin(-\frac{8\pi}{2})\big) = 1$.

(7) Poiché $|1+i| = |1-i| = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}$, $\operatorname{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4}$, si ha $(1+i)^9 = 2^{9/2}\big(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\big) = 2^{9/2}\big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big)$, e $(1-i)^7 = 2^{7/2}\big(\cos(-\frac{7\pi}{4}) + i\sin(-\frac{7\pi}{4})\big) = 2^{7/2}\big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big)$, per cui $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7} = 2$.

(8) Poiché $|\sqrt{2}+i\sqrt{6}| = 2\sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}(\sqrt{2}+i\sqrt{6}) = \frac{\pi}{3}$, si ha $\frac{(1+i)(3-3i)}{(\sqrt{2}+i\sqrt{6})^5} = \frac{6}{2^7\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})} = \frac{3\sqrt{2}}{2^7}\big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\big) = \frac{3\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})}{2^8}$.

(9) Dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt{i} = \{\cos(\frac{\pi}{4} + k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{4} + k\pi) : k = 0,1\} = \{\pm\big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big)\} = \{\pm\big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\big)\}$.

(10) Poiché $|2-2i\sqrt{3}| = 4$, $\operatorname{Arg}(2-2i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt{2-2i\sqrt{3}} = \{2\big(\cos(-\frac{\pi}{6} + k\pi) + i\sin(-\frac{\pi}{6} + k\pi)\big) : k = 0,1\} = \{\pm 2\big(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\big)\} = \{\pm\big(\sqrt{3} - i\big)\}$.

(11) Dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt[3]{i} = \{\cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}) : k = 0,1,2\} = \{\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}, \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}, -i\}$.

(12) Poiché $|-1+i| = \sqrt{2}$, $\operatorname{Arg}(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$, dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt[3]{-1+i} = \{\sqrt[6]{2}\big(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3})\big) : k = 0,1,2\} = \{\sqrt[6]{2}\big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big), \sqrt[6]{2}\big(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\big), \sqrt[6]{2}\big(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\big)\}$.

(13) Dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt[4]{-1} = \{\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}) : k = 0,1,2,3\} = \{\pm\big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big), \pm\big(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\big)\} = \{\frac{\sqrt{2}}{2}(\pm 1 \pm i)\}$.

(14) Dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt[4]{-i} = \{\cos(\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}) : k = 0, 1, 2, 3\} = \{\pm\big(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\big), \pm\big(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\big)\}$.

(15) Dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt[4]{1} = \{\cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2} : k = 0, 1, 2, 3\} = \{\pm 1, \pm i\}$.

(16) Poiché $|1-i| = \sqrt{2}$, $\mathrm{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4}$, dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt[4]{1-i} = \{\sqrt[8]{2}\big(\cos(-\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2})\big) : k = 0, 1, 2, 3\} = \{\pm\sqrt[8]{2}\big(\cos\frac{\pi}{16} - i\sin\frac{\pi}{16}\big), \pm\sqrt[8]{2}\big(\cos\frac{7\pi}{16} + i\sin\frac{7\pi}{16}\big)\}$.

(17) Poiché $|\sqrt{3}+i| = 2$, $\mathrm{Arg}(\sqrt{3}+i) = \frac{\pi}{6}$, dalla formula di de Moivre si ha $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i} = \{\sqrt[5]{2}\big(\cos(\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5})\big) : k = 0, 1, 2, 3, 4\} = \{\sqrt[5]{2}\big(\cos\frac{\pi}{30} + i\sin\frac{\pi}{30}\big), \sqrt[5]{2}\big(\cos\frac{13\pi}{30} + i\sin\frac{13\pi}{30}\big), \sqrt[5]{2}\big(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\big), \sqrt[5]{2}\big(\cos\frac{37\pi}{30} + i\sin\frac{37\pi}{30}\big), \sqrt[5]{2}\big(\cos\frac{49\pi}{30} + i\sin\frac{49\pi}{30}\big)\}$.

□

Svolgimento esercizio 4

(1) Si ha $z = -2 + \sqrt{-1} = -2 \pm i$.

(2) Si ha $z = -i + \sqrt{-4} = -i \pm 2i = \begin{cases} -3i, \\ i. \end{cases}$

(3) Si ha $z = 1 + \sqrt{i} = 1 \pm \big(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\big) = \begin{cases} 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

(4) Si ha $z = 1 + \sqrt{1 + i\sqrt{3}}$. Poiché $|1 + i\sqrt{3}| = 2$, $\mathrm{Arg}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, si ha $z = 1 \pm \sqrt{2}\big(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\big) = \begin{cases} 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 1 - \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$

(5) Si ha $z = -2\sqrt{3} + i + 2\sqrt{1 - i\sqrt{3}}$. Poiché $|1 - i\sqrt{3}| = 2$, $\mathrm{Arg}(1 - i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, si ha $z = -2\sqrt{3} + i \pm 2\sqrt{2}\big(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}\big) = \begin{cases} -2\sqrt{3} - \sqrt{6} + (1 + \sqrt{2})i, \\ -2\sqrt{3} + \sqrt{6} + (1 - \sqrt{2})i. \end{cases}$

(6) Si ha $z = \sqrt[3]{-1} = \{\cos(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}) : k = 0, 1, 2\} = \{\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}), -1\}$.

(7) Poiché $z^3 + z^2 + z + 1 = (z+1)(z^2+1)$, si ha $z = -1 \vee z = \pm i$.

(8) Si ha $z^4 - 4z^2 + 8 = 0 \iff z^2 = 2 \pm 2i \iff z = \sqrt{2+2i} = \pm\sqrt[4]{8}\big(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\big) \vee z = \sqrt{2-2i} = \pm\sqrt[4]{8}\big(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\big)$.

(9) Si ha $z^4 - 2iz^2 - 2 = 0 \iff z^2 = i \pm 1 \iff z = \sqrt{i-1} = \pm\sqrt[4]{2}\big(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\big) \vee z = \sqrt{i+1} = \pm\sqrt[4]{2}\big(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\big)$.

(10) Si ha $\big(\frac{2z+1}{2z-1}\big)^4 = 1 \iff \frac{2z+1}{2z-1} = \sqrt[4]{1} = \{\pm 1, \pm i\} \iff z = 0 \vee z = \pm\frac{i}{2}$.

(11) Si ha $z = \sqrt[5]{1} = \{\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{3} : k = 0, 1, 2, 3, 4\}$.

(12) Si ha $(z+1)^5 - (z-1)^5 = 0 \iff \big(\frac{z+1}{z-1}\big)^5 = 1 \iff \frac{z+1}{z-1} = \sqrt[5]{1} = \{\cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{3} : k = 0, 1, 2, 3, 4\} \iff z = \big\{\frac{\cos\frac{2k\pi}{5} + 1 + i\sin\frac{2k\pi}{5}}{\cos\frac{2k\pi}{5} - 1 + i\sin\frac{2k\pi}{5}} : k = 1, 2, 3, 4\big\}$.

(13) Si ha $z = \sqrt[6]{-27} = \left\{ \sqrt{3}\big(\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3})\big) : k = 0,1,2,3,4,5 \right\} \iff z = \pm i\sqrt{3} \vee z = \frac{\pm 3 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

(14) Poiché $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\big)$, si ha $z = \sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt[16]{2}}\big(\cos(\frac{5\pi}{96}+\frac{k\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{96}+\frac{k\pi}{4})\big) : k = 0,1,2,3,4,5,6,7 \right\}$.

$\square$

Svolgimento esercizio 5

(1) Per $n=1$ l'uguaglianza è vera. Supponiamo che essa sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, e dimostriamola vera per $n+1$. Infatti $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{1}{2}\, n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}\,(n+1)(n+2)$, che è l'uguaglianza che dovevamo dimostrare. Per il principio di induzione, l'uguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(2) Per $n=1$ l'uguaglianza è vera. Supponiamo che essa sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, e dimostriamola vera per $n+1$. Infatti $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 = \frac{1}{6}\,(n+1)(2n^2+7n+6) = \frac{1}{6}\,(n+1)(n+2)(2n+3)$, che è l'uguaglianza che dovevamo dimostrare. Per il principio di induzione, l'uguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(3) Per $n=1$ l'uguaglianza è vera. Supponiamo che essa sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, e dimostriamola vera per $n+1$. Infatti $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}\, n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 = \frac{1}{4}\,(n+1)^2(n^2+4n+4) = \frac{1}{4}\,(n+1)^2(n+2)^2$, che è l'uguaglianza che dovevamo dimostrare. Per il principio di induzione, l'uguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(4) Fissiamo $q \neq 1$. Per $n=1$ l'uguaglianza è vera, in quanto $1+q = \frac{q^2-1}{q-1}$. Supponiamo che essa sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, e dimostriamola vera per $n+1$. Infatti $\sum_{k=0}^{n+1} q^n = \sum_{k=0}^{n} q^n + q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}$, che è l'uguaglianza che dovevamo dimostrare. Per il principio di induzione, l'uguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(5) Per $n=1$ l'uguaglianza è vera. Supponiamo che essa sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, e dimostriamola vera per $n+1$. Infatti $\sum_{k=1}^{n+1}(8k-5) = \sum_{k=1}^{n}(8k-5) + (8n+3) = n(4n-1) + 8n + 3 = 4n^2 + 7n + 3 = (n+1)(4n+3)$, che è l'uguaglianza che dovevamo dimostrare. Per il principio di induzione, l'uguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(6) Per $n=1$ l'uguaglianza è vera. Supponiamo che essa sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, e dimostriamola vera per $n+1$. Infatti $\sum_{k=1}^{n+1}(2n+2+2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2n+2k-1+2) + (4n+3) = \sum_{k=1}^{n}(2n+2k-1) + \sum_{k=1}^{n} 2 + (4n+3) = 3n^2 + 2(n+1) + 4n + 3 = 3n^2 + 6n + 3 = 3(n+1)^2$, che è l'uguaglianza che dovevamo dimostrare. Per il principio di induzione, l'uguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Alternativamente, $\sum_{k=1}^{n}(2n+2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2n-1) + 2\sum_{k=1}^{n} k = n(2n-1) + n(n+1) = 3n^2$, usando l'esercizio (1).

(7) Per $n=2$ la disuguaglianza è vera. Supponiamo che essa sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e dimostriamola vera per $n+1$. Infatti $(n+1)! = (n+1)\cdot n! \geq 2^{n-1}(n+1) \geq 2^n$, che è la disuguaglianza che dovevamo dimostrare. Per il principio di induzione, la disuguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(8) Per $n = 2$ la disuguaglianza è vera. Supponiamo che essa sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e dimostriamola vera per $n + 1$. Infatti $(n + 1)! = (n + 1) \cdot n! \geq 2 \cdot 3^{n-2}(n + 1) \geq 2 \cdot 3^{n-1}$, che è la disuguaglianza che dovevamo dimostrare. Per il principio di induzione, la disuguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Analisi Matematica I
Limiti di successioni

Esercizio 1. Verificare, usando la definizione, i seguenti limiti di successioni

(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{n+1} = 2$

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+3n}{n^2+1} = 1$

(3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{2n+3}{2n+1}} = 1$

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4\sqrt{n}-3}{\sqrt{n}+1} = 4$

(5) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$

(6) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n+1} = +\infty$

(7) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n+1} = +\infty$

(8) $\lim_{n\to\infty} \log_2 \dfrac{1}{n} = -\infty$

(9) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} - n = -\infty$

Esercizio 2. Calcolare il limite per $n \to \infty$ delle seguenti successioni

(1) $a_n = \dfrac{n^3+2n^2-\sqrt{n}}{n^2+3n-1}$

(2) $a_n = \dfrac{n^3+2n^2-\sqrt{n}}{n^2+3n-1}\Big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n^2}\Big)$

(3) $a_n = \dfrac{n^2+3n^{3/2}+\sqrt{n+3}+1}{5n^3+\sqrt[3]{n+7}}$

(4) $a_n = \dfrac{n^2+3n^{3/2}+\sqrt{n+3}+1}{5n^2+\sqrt[3]{n+7}}$

(5) $a_n = \dfrac{n^2+3n^{3/2}+\sqrt{n+3}+1}{5n^{1/3}+\sqrt[3]{n+7}}$

(6) $a_n = \Big(\dfrac{2n^2+3+\sqrt{n}}{n^2+1} - 2\Big)(n^{4/3}+2n+1)$

(7) $a_n = \Big(\dfrac{2n^2+3+\sqrt{n}}{n^2+1} - 2\Big)^2(n^{3/2}+7n^2+\pi)$

(8) $a_n = \sqrt{\dfrac{2n^2+3+\sqrt{n}}{n^2+1} - 2}\ (7n+2)$

(9) $a_n = \Big(\dfrac{2n^2+3+\sqrt{n}}{n^2+1} - 2\Big)\sqrt{7n+2}$

(10) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(11) $a_n = \sqrt{n+1} - n$

(12) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$

(13) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}$

(14) $a_n = \sqrt{n^2+n+1} - n$

(15) $a_n = \sqrt{n^2+\sqrt{n+1}} - n$

(16) $a_n = (\sqrt{n^2+\sqrt{n+1}} - n)^2$

(17) $a_n = (\sqrt{n^2+\sqrt{n+1}} - n)^2\sqrt{n+1}$

(18) $a_n = \sqrt{n^2+n^3+1} - n$

(19) $a_n = \sqrt{n^2+n^{1/3}+1} - n$

(20) $a_n = \sqrt{n^2+n^3+1} - n^{3/2}$

(21) $a_n = \sqrt{n^3+n+1} - n^{3/2}$

(22) $a_n = \dfrac{n^2+3n^{3/2}+\sqrt{n+3}+1}{5n^{1/3}+\sqrt[3]{n+7}}(\sqrt{n^3+n+1} - n^{3/2})$

(23) $a_n = \dfrac{n^2+3n^{3/2}+\sqrt{n+3}+1}{5n^{1/3}+\sqrt[3]{n+7}} + \sqrt{n^3+n+1} - n^{3/2}$

(24) $a_n = \Big(\dfrac{n^2+3n^{3/2}+\sqrt{n+3}+1}{5n^{1/3}+\sqrt[3]{n+7}}\Big)^2 + \sqrt{n^3+n+1} - n^{3/2}$

(25) $a_n = \sqrt[3]{n^3+2n^2} - n$

(26) $a_n = \sqrt[3]{n^6-n^4+1} - n^2$

Esercizio 3. Calcolare il limite per $n \to \infty$ delle seguenti successioni

(1) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+3}} - n5^{-\sqrt{n}} + 3}{\big(n^5+3\,\mathrm{arctg}(n!)+7\big)^{2/7}}$

(2) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+\sqrt{20^n+1}} + 5\cdot 2^n\sqrt{n} + 2}{3^n + 8\cdot 5^{-n^2+n} + 1}$

(3) $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)! - (n-1)!}$

(4) $a_n = \dfrac{n^{n-3}(n+3)! + n^{n-2}(n+2)!}{n!\cdot n^n}$

(5) $a_n = \dfrac{n!(2n + 3\cos n) - (n+1)!}{n!(2n - \log_3 n) + 2^{\log_3(n!)}}$

(6) $a_n = \dfrac{2n! + (2n)!}{n^n + 3n!}$

(7) $a_n = \dfrac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\,)n! + 3n^{51} + 5^{n+1}}{(n-1)!\,\big(4n + n^{1/3} + \sin(n^5+3)\big)^{3/2}}$

(8) $a_n = \dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\,)n! + 3n^{51} + (n+1)5^{n+1}}{(n-1)!\,\sqrt{4n + 2n^2 + n^{3/2}\sin(n^5+3)}}$

(9) $a_n = \dfrac{n^n + 3^n}{2^{n\log_2 n}}$

(10) $a_n = \dfrac{n^n + n!}{2^{n^2}}$

(11) $a_n = \dfrac{n!(n^7 + 5n^2 + 1)2^n}{6^{n^2}}$

(12) $a_n = \dfrac{5^{n\log_5 n} - 5^n}{n^{\log_5 n} + n^{n+\log_5 n}}$

(13) $a_n = \dfrac{n! \cdot 3^{(n+1)!} + 5^{(n+1)!}}{\big((n+1)!\big)^2}$

(14) $a_n = \dfrac{n! \cdot 7^{n!} - 5^{(n+1)!}}{\big((n+1)!\big)^2 + 32^{n^2} + 1}$

(15) $a_n = \dfrac{n! \cdot 7^{n(n+1)} + 4^{(n+1)!}}{(n+1)^n}$

(16) $a_n = \dfrac{(n!)^n \cdot 7^{n(n+1)} + 4^{(n+1)!}}{\big((n-1)!\big)^n}$

(17) $a_n = \dfrac{(n! \cdot 7^n)^{n+1} - 4^{(n+1)!} + 2n^n}{n^{(n-1)!}}$

(18) $a_n = \dfrac{(n-3)!\,n^n - (n+1)!\,n^{n-4}}{2(n-4)!\,(n^n - n!\log_4 n)}$

Esercizio 4. Determinare l'ordine di infinito/infinitesimo delle seguenti successioni

(1) $a_n = \log_{12} n + \sqrt[12]{n}$

(2) $a_n = n^{150} + \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$

(3) $a_n = n^{1/2}(1 + n^{1/4})$

(4) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

(5) $a_n = \dfrac{n!}{(n-1)!} - 3$

(6) $a_n = \dfrac{(n+1)! - (n-1)!}{n!}$

(7) $a_n = \dfrac{5^{2n\log_5 n} - 3^{n\log_3(n^2)} + n^4}{7^{n^2\log_7(n^2)} - 4^{2n^2\log_4 n} + n^2}$

(8) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+3}} - n^3 4^{-\sqrt{n}} + 5}{\left(n^5 - 4\operatorname{arctg}(n^n) + 12\right)^{1/16}}$

(9) $a_n = \dfrac{2n!\,(n^n - n!\log_2 n)}{(n-3)!\,n^n - (n+1)!\,n^{n-4}}$

(10) $a_n = \dfrac{((n+1)!)^2\,5^{n\log_5 n} - (n!)^2\,3^{(n-1)\log_3 n}}{((n-1)!)^2\,4^{(n-2)\log_4 n} - ((n-2)!)^2\,6^{(n+1)\log_6 n}}$

(11) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

(12) $a_n = \dfrac{\sqrt{n} + n^{7/3}}{n^5 + n^3 + 8}$

(13) $a_n = 2 - \dfrac{2n^2}{n^2+n}$

(14) $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)! - (n-1)!}$

(15) $a_n = \dfrac{(n^2+1)(7^{n!} + 3^{n^2})}{(7^{n!} + 9^{n^2+n})(n^3 + \log_4 n)}$

(16) $a_n = \dfrac{n^{2(n+4)}\,n! - (n-1)!\,n^{2n+7}}{(n+1)!\,n^{2n+9} + (n^2)^n\,(n+2)!}$

Esercizio 5. Calcolare il limite per $n \to \infty$ delle seguenti successioni

(1) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$

(2) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n+1}\right)^n$

(3) $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

(4) $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^n + 3}$

(5) $a_n = \dfrac{(n+1)^n}{n^n + n^2}$

(6) $a_n = \dfrac{(2n+1)^n}{(2n)^n + n^4}$

(7) $a_n = \dfrac{(2n)^n + 2^n}{(2n+1)^n}$

(8) $a_n = \dfrac{(2n+1)^n}{2n^n + 1}$

(9) $a_n = (n+1)^n - n!$

(10) $a_n = (n+1)^{n+1} - n^{n+1}$

(11) $a_n = \dfrac{(n+1)^{n+1} - n^{n+1}}{(n-1)^{n+1} - n!}$

(12) $a_n = (n+1)^{n!} - n^{2n}$

(13) $a_n = \dfrac{(n+1)^n + n!}{n^n + 5^n - n!}$

(14) $a_n = \dfrac{(2n+1)^n + n! + 1}{(2n+2)^n - n! + n^2}$

(15) $a_n = \dfrac{(2n+1)^n + (2n)^n}{(2n+2)^n - (2n+1)^n}$

(16) $a_n = \dfrac{n^{n-3} + (n-3)^n}{6n^n + 7n^{n/2}}$

(17) $a_n = \dfrac{(3n)^n - n^{3n}}{(n-1)^{3n} + (n+3)!}$

(18) $a_n = \left(\sqrt{1+e^{-n}} - 1\right)\left(e^n - 3^n + n^2\right)$

(19) $a_n = \dfrac{(e^n + 1)(n + \log n)}{(e^n + 2^n)(2 + \log n^6)}$

(20) $a_n = \dfrac{(n^2 + 5n + 7)e^{1/n}}{(n+1)(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})}$

(21) $a_n = \sqrt[n]{2n}$

(22) $a_n = \sqrt[n]{n^3}$

(23) $a_n = \sqrt[2n+1]{-n}$

(24) $a_n = \sqrt[n]{n^2 + 3}$

(25) $a_n = \sqrt[n]{2^n + n^2}$

(26) $a_n = \left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}\right) \sqrt[n]{2^{n+1} + n^2}$

(27) $a_n = \dfrac{(n^2 + 5n + 7)e^{1/n}}{(n+1)(\sqrt{n+3} - \sqrt{n})}$

(28) $a_n = n^2(2n + \sqrt{n}\,)^{1/n} - \cos(n^3)$

(29) $a_n = \left(4n^n - (n+1)^n\right)^{1/n}$

(30) $a_n = \big((n+1)^{n+1} - n^{n+1}\big)^{1/n}$

Esercizio 6. Calcolare il limite per $n \to \infty$ delle seguenti successioni, usando la formula di Stirling

(1) $a_n = \dfrac{n!}{n^{n/2}}$

(2) $a_n = \sqrt[n]{n!}$

(3) $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

(4) $a_n = \dfrac{\sqrt[2n]{n!}}{n}$

(5) $a_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}}$

(6) $a_n = \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$

(7) $a_n = \sqrt[n]{\dbinom{4n}{2n}}$

Analisi Matematica I
Limiti di successioni (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\left|\frac{2n+3}{n+1} - 2\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, e quindi basta prendere $n_\varepsilon := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1$.

(2) Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\left|\frac{n^2+3n}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon \iff \frac{3n-1}{n^2+1} < \varepsilon \iff \varepsilon n^2 - 3n + \varepsilon - 1 > 0$, ed è sufficiente prendere $n > \frac{3+\sqrt{9+4\varepsilon-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}$, e quindi basta prendere $n_\varepsilon := \left[\frac{3+\sqrt{9+4\varepsilon-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}\right]$. Più semplicemente, poiché $\frac{3n-1}{n^2+1} < \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}$, è sufficiente prendere $n > \frac{3}{\varepsilon}$, e quindi $n_\varepsilon := \left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$.

(3) Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\left|\sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}} - 1\right| < \varepsilon \iff \frac{\frac{2n+3}{2n+1}-1}{\sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}}+1} < \varepsilon \iff \frac{\frac{2}{2n+1}}{\sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}}+1} < \varepsilon$. Poiché $\frac{\frac{2}{2n+1}}{\sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}}+1} < \frac{2}{2n+1} < \frac{1}{n}$, è sufficiente prendere $n > \frac{1}{\varepsilon}$, e quindi $n_\varepsilon := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

(4) Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\left|\frac{4\sqrt{n}-3}{\sqrt{n}+1} - 4\right| < \varepsilon \iff \frac{7}{\sqrt{n}+1} < \varepsilon \iff n > \left(\frac{7}{\varepsilon} - 1\right)^2$, e quindi basta prendere $n_\varepsilon := \left[\left(\frac{7}{\varepsilon} - 1\right)^2\right]$, ma basterebbe anche $n_\varepsilon := \left[\frac{49}{\varepsilon^2}\right]$.

(5) Infatti, per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \varepsilon$. Poiché $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n}}$, è sufficiente prendere $n > \frac{4}{\varepsilon^2}$, e quindi $n_\varepsilon := \left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]$.

(6) Infatti, per ogni $M > 0$ si ha $\sqrt{n^2+n+1} > M \iff n^2 + n - (M^2 - 1) > 0$, ed è sufficiente prendere $n > \frac{-1+\sqrt{4M^2-3}}{2}$, e quindi $n_M := \left[\frac{\sqrt{4M^2-3}-1}{2}\right]$. Più semplicemente, poiché $\sqrt{n^2+n+1} > \sqrt{n^2} = n$, è sufficiente prendere $n > M$, e quindi $n_M := \left[M\right]$.

(7) Infatti, per ogni $M > 0$ si ha $\frac{n^2+1}{n+1} > M \iff \frac{n^2-Mn-(M-1)}{n+1} > 0 \iff n^2 - Mn - (M-1) > 0$, ed è sufficiente prendere $n > \frac{M+\sqrt{M^2+4M-4}}{2}$, e quindi $n_M := \left[\frac{M+\sqrt{M^2+4M-4}}{2}\right]$. Più semplicemente, poiché $\frac{n^2+1}{n+1} > \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$, è sufficiente prendere $n > 2M$, e quindi $n_M := \left[2M\right]$.

(8) Infatti, per ogni $M > 0$ si ha $\log_2 \frac{1}{n} < -M \iff \log_2 n > M \iff n > 2^M$, e quindi basta prendere $n_M := \left[2^M\right]$.

(9) Infatti, per ogni $M > 0$ si ha $\sqrt{n} - n < -M \iff n - \sqrt{n} - M > 0$, e quindi è sufficiente prendere $n > \left(\frac{1+\sqrt{1+4M}}{2}\right)^2$, e quindi $n_M := \left[\left(\frac{1+\sqrt{1+4M}}{2}\right)^2\right]$.

$\square$

Svolgimento esercizio 2

(1) Si ha $\dfrac{n^3+2n^2-\sqrt{n}}{n^2+3n-1} = \dfrac{n^3(1+o(1))}{n^2(1+o(1))} = n(1+o(1)) \to +\infty$.

(2) Si ha $\dfrac{n^3+2n^2-\sqrt{n}}{n^2+3n-1}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n^2}\right) = \dfrac{n^3(1+o(1))}{n^2(1+o(1))}\,\dfrac{1}{n}(1+o(1)) = 1 + o(1) \to 1$.

(3) Si ha $\dfrac{n^2+3n^{3/2}+\sqrt{n+3}+1}{5n^3+\sqrt[3]{n+7}} = \dfrac{n^2(1+o(1))}{5n^3(1+o(1))} = \dfrac{1}{5n}(1+o(1)) \to 0$.

(4) Si ha $\dfrac{n^2+3n^{3/2}+\sqrt{n+3}+1}{5n^2+\sqrt[3]{n+7}} = \dfrac{n^2(1+o(1))}{5n^2(1+o(1))} = \dfrac{1}{5}(1+o(1)) \to \dfrac{1}{5}$.

(5) Si ha $\dfrac{n^2+3n^{3/2}+\sqrt{n+3}+1}{5n^{1/3}+\sqrt[3]{n+7}} = \dfrac{n^2(1+o(1))}{6n^{1/3}(1+o(1))} = \dfrac{n^{5/6}}{6}(1+o(1)) \to +\infty$.

(6) Si ha $\big(\dfrac{2n^2+3+\sqrt{n}}{n^2+1}-2\big)(n^{4/3}+2n+1) = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n^2+1}\,(n^{4/3}+2n+1) = \dfrac{\sqrt{n}(1+o(1))}{n^2(1+o(1))}\,n^{4/3}(1+o(1)) = \dfrac{1}{n^{1/6}}(1+o(1)) \to 0$.

(7) Si ha $\big(\dfrac{2n^2+3+\sqrt{n}}{n^2+1}-2\big)(n^{3/2}+7n^2+\pi) = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n^2+1}\,(n^{3/2}+7n^2+\pi) = \dfrac{\sqrt{n}(1+o(1))}{n^2(1+o(1))}\,7n^2(1+o(1)) = 7\sqrt{n}(1+o(1)) \to +\infty$.

(8) Si ha $\sqrt{\dfrac{2n^2+3+\sqrt{n}}{n^2+1}-2}\ (7n+2) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{n}+1}{n^2+1}}\ (7n+2) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{n}(1+o(1))}{n^2(1+o(1))}}\ 7n(1+o(1)) = 7\sqrt[4]{n}(1+o(1)) \to +\infty$.

(9) Si ha $\big(\dfrac{2n^2+3+\sqrt{n}}{n^2+1}-2\big)\sqrt{7n+2} = \dfrac{\sqrt{n}+1}{n^2+1}\sqrt{7n+2} = \dfrac{\sqrt{n}(1+o(1))}{n^2(1+o(1))}\sqrt{7n}(1+o(1)) = \dfrac{\sqrt{7}}{n}(1+o(1)) \to 0$.

(10) Si ha $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}(1+o(1))} \to 0$.

(11) Si ha $\sqrt{n+1}-n = -n(1+o(1)) \to -\infty$.

(12) Si ha $\sqrt{n^2+1}-n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = \dfrac{1}{2n(1+o(1))} \to 0$.

(13) Si ha $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n} = n(1+o(1)) \to +\infty$.

(14) Si ha $\sqrt{n^2+n+1}-n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \dfrac{n(1+o(1))}{2n(1+o(1))} = \dfrac{1}{2}(1+o(1)) \to \dfrac{1}{2}$.

(15) Si ha $\sqrt{n^2+\sqrt{n+1}}-n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \dfrac{\sqrt{n}(1+o(1))}{2n(1+o(1))} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}(1+o(1))} \to 0$.

(16) Si ha $\big(\sqrt{n^2+\sqrt{n+1}}-n\big)^2 = \Big(\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}+n}\Big)^2 = \Big(\dfrac{\sqrt{n}(1+o(1))}{2n(1+o(1))}\Big)^2 = \Big(\dfrac{1}{2\sqrt{n}(1+o(1))}\Big)^2 = \dfrac{1}{4n(1+o(1))} \to 0$.

(17) Si ha $\big(\sqrt{n^2+\sqrt{n+1}}-n\big)^2\sqrt{n+1} = \Big(\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}+n}\Big)^2\sqrt{n+1} = \Big(\dfrac{\sqrt{n}(1+o(1))}{2n(1+o(1))}\Big)^2\sqrt{n}(1+o(1)) = \Big(\dfrac{1}{2\sqrt{n}(1+o(1))}\Big)^2\sqrt{n}(1+o(1)) = \dfrac{\sqrt{n}(1+o(1))}{4n(1+o(1))} = \dfrac{1}{4\sqrt{n}(1+o(1))} \to 0$.

(18) Si ha $\sqrt{n^2+n^3+1}-n = \dfrac{n^3+1}{\sqrt{n^2+n^3+1}+n} = \dfrac{n^3(1+o(1))}{n^{3/2}(1+o(1))} = n^{3/2}(1+o(1)) \to +\infty$.

(19) Si ha $\sqrt{n^2+n^{1/3}+1}-n=\dfrac{n^{1/3}+1}{\sqrt{n^2+n^{1/3}+1}+n}=\dfrac{n^{1/3}(1+o(1))}{n^{3/2}(1+o(1))}=\dfrac{1}{n^{7/6}}(1+o(1))\to 0.$

(20) Si ha $\sqrt{n^2+n^3+1}-n^{3/2}=\dfrac{n^2+1}{\sqrt{n^2+n^3+1}+n^{3/2}}=\dfrac{n^2(1+o(1))}{2n^{3/2}(1+o(1))}=\dfrac{n^{1/2}}{2}(1+o(1))\to+\infty.$

(21) Si ha $\sqrt{n^3+n+1}-n^{3/2}=\dfrac{n+1}{\sqrt{n^3+n+1}+n^{3/2}}=\dfrac{n(1+o(1))}{2n^{3/2}(1+o(1))}=\dfrac{1}{2n^{1/2}}(1+o(1))\to 0.$

(22) Usando il risultato dell'esercizio (21), si ha $\dfrac{n^2+3n^{3/2}+\sqrt{n+3}+1}{5n^{1/3}+\sqrt[3]{n+7}}(\sqrt{n^3+n+1}-n^{3/2})=$ $\dfrac{n^2(1+o(1))}{6n^{1/3}(1+o(1))}\,\dfrac{1}{2n^{1/2}(1+o(1))}=\dfrac{n^{7/6}}{12}(1+o(1))\to+\infty.$

(23) Usando il risultato dell'esercizio (21), si ha $\dfrac{n^2+3n^{3/2}+\sqrt{n+3}+1}{5n^{1/3}+\sqrt[3]{n+7}}+\sqrt{n^3+n+1}-n^{3/2}=$ $\dfrac{n^2(1+o(1))}{6n^{1/3}(1+o(1))}+\dfrac{1}{2n^{1/2}(1+o(1))}=\dfrac{n^{5/3}}{6}(1+o(1))\to+\infty.$

(24) Usando il risultato dell'esercizio (21), si ha $\left(\dfrac{n^2+3n^{3/2}+\sqrt{n+3}+1}{5n^{1/3}+\sqrt[3]{n+7}}\right)^2+\sqrt{n^3+n+1}-n^{3/2}=$ $\left(\dfrac{n^2(1+o(1))}{6n^{1/3}(1+o(1))}\right)^2+\dfrac{1}{2n^{1/2}(1+o(1))}=\dfrac{n^{10/3}}{36}(1+o(1))\to+\infty.$

(25) Si ha $\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n=\dfrac{2n^2}{(n^3+2n^2)^{2/3}+n(n^3+2n^2)^{1/3}+n^2}=\dfrac{2n^2}{3n^2(1+o(1))}\to\dfrac{2}{3}.$

(26) Si ha $\sqrt[3]{n^6-n^4+1}-n^2=\dfrac{-n^4+1}{(n^6-n^4+1)^{2/3}+n^2(n^6-n^4+1)^{1/3}+n^4}=\dfrac{-n^4(1+o(1))}{3n^4(1+o(1))}\to-\dfrac{1}{3}.$

$\square$

Svolgimento esercizio 3

(1) Si ha $\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+3}}-n5^{-\sqrt{n}}+3}{\left(n^5+3\,\mathrm{arctg}(n!)+7\right)^{2/7}}=\dfrac{\sqrt{n(1+o(1))}+3+o(1)}{\left(n^5(1+o(1))\right)^{2/7}}=\dfrac{\sqrt{n}(1+o(1))}{n^{10/7}(1+o(1))}\to 0.$

(2) Si ha $\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{20^n+1}}+5\cdot 2^n\sqrt{n}+2}{3^n+8\cdot 5^{-n^2+n}+1}=\dfrac{(\sqrt[4]{20})^n(1+o(1))+5\sqrt{n}\cdot 2^n(1+o(1))}{3^n(1+o(1))}=\dfrac{(\sqrt[4]{20})^n(1+o(1))}{3^n(1+o(1))}\to$ 0, perché $\dfrac{\sqrt{n}\cdot 2^n}{(\sqrt[4]{20})^n}=\dfrac{\sqrt{n}}{(\sqrt[4]{\frac{5}{4}})^n}\to 0.$

(3) Si ha $\dfrac{n!}{(n+1)!-(n-1)!}=\dfrac{(n-1)!n}{(n-1)!n(n+1)-(n-1)!}=\dfrac{n}{n^2+n-1}=\dfrac{n}{n^2(1+o(1))}=\dfrac{1}{n}(1+$ $o(1))\to 0.$

(4) Si ha $\dfrac{n^{n-3}(n+3)!+n^{n-2}(n+2)!}{n!\cdot n^n}=\dfrac{(n+3)!}{n!n^3}+\dfrac{(n+2)!}{n!n^2}=\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{n^3}+\dfrac{(n+2)(n+1)}{n^2}=$ $2(1+o(1))\to 2.$

(5) Si ha $\dfrac{n!(2n+3\cos n)-(n+1)!}{n!(2n-\log_3 n)+2^{\log_3(n!)}} = \dfrac{n!(2n+3\cos n-(n+1))}{n!\cdot 2n(1+o(1))+(n!)^{\log_3 2}} = \dfrac{n!\cdot n(1+o(1))}{n!\cdot 2n(1+o(1))} \to \dfrac{1}{2}$.

(6) Si ha $\dfrac{2n!+(2n)!}{n^n+3n!} = \dfrac{(2n)!(1+o(1))}{n^n(1+o(1))} = \dfrac{2n}{n}\dfrac{2n-1}{n}\cdots\dfrac{n+1}{n}n!(1+o(1)) \geq n! \to +\infty$.

(7) Si ha $\dfrac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})n!+3n^{51}+5^{n+1}}{(n-1)!\left(4n+n^{1/3}+\sin(n^5+3)\right)^{3/2}} = \dfrac{2\sqrt{n}\cdot n!(1+o(1))}{(n-1)!(4n)^{3/2}(1+o(1))} = \dfrac{2n\sqrt{n}(1+o(1))}{8n^{3/2}(1+o(1))} \to \dfrac{1}{4}$.

(8) Si ha $\dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})n!+3n^{51}+(n+1)5^{n+1}}{(n-1)!\sqrt{4n+2n^2+n^{3/2}\sin(n^5+3)}} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{n}}n!(1+o(1))}{(n-1)!\cdot n\sqrt{2}(1+o(1))} = \dfrac{1}{2\sqrt{2n}}(1+o(1)) \to 0$.

(9) Si ha $\dfrac{n^n+3^n}{2^{n\log_2 n}} = \dfrac{n^n(1+o(1))}{n^n} \to 1$.

(10) Si ha $\dfrac{n^n+n!}{2^{n^2}} = \dfrac{2^{n\log_2 n}(1+o(1))}{2^{n^2}} \to 0$.

(11) Si ha $\dfrac{n!(n^7+5n^2+1)2^n}{6^{n^2}} = \dfrac{n!\cdot n^7(1+o(1))}{6^{n^2-n\log_6 2}} = \dfrac{n!\cdot n^7(1+o(1))}{6^{n^2}(1+o(1))} \to 0$.

(12) Si ha $\dfrac{5^{n\log_5 n}-5^n}{n^{\log_5 n}+n^{n+\log_5 n}} = \dfrac{n^n(1+o(1))}{n^{n+\log_5 n}(1+o(1))} = \dfrac{1}{5^{(\log_5 n)^2}}(1+o(1)) \to 0$.

(13) Si ha $\dfrac{n!\cdot 3^{(n+1)!}+5^{(n+1)!}}{\left((n+1)!\right)^2} = \dfrac{5^{(n+1)!}(1+o(1))}{((n+1)!)^2} \to +\infty$, perché $\dfrac{n!\cdot 3^{(n+1)!}}{5^{(n+1)!}} = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{(n+1)!}{(\frac{5}{3})^{(n+1)!}} \to 0$.

(14) Si ha $\dfrac{n!\cdot 7^{n!}-5^{(n+1)!}}{\left((n+1)!\right)^2+32^{n^2}+1} = -\dfrac{5^{(n+1)!}(1+o(1))}{32^{n^2}(1+o(1))} \to -\infty$, perché $\dfrac{5^{(n+1)!}}{n!\cdot 7^{n!}} = 5^{(n+1)!-\log_5(n!)-n!\log_7 5} = 5^{(n+1)!(1+o(1))} \to +\infty$, e $0 \leq \dfrac{\left((n+1)!\right)^2}{32^{n^2}} \leq (n+1)^2\dfrac{n^{2n}}{32^{n^2}} = \dfrac{n^2(1+o(1))}{32^{n^2-2n\log_{32} n}} \to 0$.

(15) Si ha $\dfrac{n!\cdot 7^{n(n+1)}+4^{(n+1)!}}{(n+1)^n} = \dfrac{4^{(n+1)!}(1+o(1))}{(n+1)^n} \to +\infty$.

(16) Si ha $\dfrac{(n!)^n\cdot 7^{n(n+1)}+4^{(n+1)!}}{\left((n-1)!\right)^n} = \dfrac{4^{(n+1)!}(1+o(1))}{4^{n\log_4(n-1)!}} \to +\infty$.

(17) Si ha $\dfrac{(n!\cdot 7^n)^{n+1}-4^{(n+1)!}+2n^n}{n^{(n-1)!}} = \dfrac{-4^{(n+1)!}(1+o(1))}{4^{(n-1)!\log_4 n}} \to -\infty$.

(18) Si ha $\dfrac{(n-3)!\,n^n-(n+1)!\,n^{n-4}}{2(n-4)!\,(n^n-n!\log_4 n)} \overset{(a)}{=} \dfrac{(n-3)n^4-(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{2n^4(1+o(1))} =$
$= \dfrac{2n^4(1+o(1))}{2n^4(1+o(1))} \to 1$, dove in (a) si è diviso numeratore e denominatore per $(n-4)!\,n^{n-4}$.

$\square$

Svolgimento esercizio 4

(1) Si ha $a_n = \log_{12} n + \sqrt[12]{n} = \sqrt[12]{n}(1+o(1))$, e l'ordine di infinito di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è $\frac{1}{12}$.

(2) Si ha $a_n = n^{150} + \left(\frac{3}{2}\right)^n = \left(\frac{3}{2}\right)^n (1+o(1))$, e l'ordine di infinito di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ non esiste.

(3) Si ha $a_n = n^{1/2}(1+n^{1/4}) = n^{3/4}(1+o(1))$, e l'ordine di infinito di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è $\frac{3}{4}$.

(4) Si ha $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \sqrt{n+1}+\sqrt{n} = 2\sqrt{n}(1+o(1))$, e l'ordine di infinito di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è $\frac{1}{2}$.

(5) Si ha $a_n = \dfrac{n!}{(n-1)!} - 3 = n-3 = n(1+o(1))$, e l'ordine di infinito di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è 1.

(6) Si ha $a_n = \dfrac{(n+1)!-(n-1)!}{n!} = \dfrac{n(n+1)-1}{n} = n(1+o(1))$, e l'ordine di infinito di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è 1.

(7) Si ha $a_n = \dfrac{5^{2n\log_5 n} - 3^{n\log_3(n^2)} + n^4}{7^{n^2\log_7(n^2)} - 4^{2n^2\log_4 n} + n^2} = \dfrac{n^{2n} - (n^2)^n + n^4}{(n^2)^{n^2} - n^{2n^2} + n^2} = n^2$. L'ordine di infinito di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è 2.

(8) Si ha $a_n = \dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+3}} - n^3 4^{-\sqrt{n}} + 5}{\big(n^5 - 4\,\mathrm{arctg}(n^n) + 12\big)^{1/16}} = \dfrac{\sqrt{n(1+o(1))} + 5 + o(1)}{\big(n^5(1+o(1))\big)^{1/16}} = \dfrac{\sqrt{n}(1+o(1))}{n^{5/16}(1+o(1))} = n^{3/16}(1+o(1))$, e l'ordine di infinito di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è $\frac{3}{16}$.

(9) Si ha $a_n = \dfrac{2n!\,(n^n - n!\log_2 n)}{(n-3)!\,n^n - (n+1)!\,n^{n-4}} \overset{(a)}{=} \dfrac{2n^4 n(n-1)(n-2)(1+o(1))}{n^4 - (n+1)n(n-1)(n-2)} = \dfrac{2n^7(1+o(1))}{2n^3(1+o(1))} = n^4(1+o(1))$, dove in (a) si è diviso numeratore e denominatore per $(n-3)!\,n^{n-4}$. L'ordine di infinito di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è 4.

(10) Si ha $a_n = \dfrac{((n+1)!)^2\,5^{n\log_5 n} - (n!)^2\,3^{(n-1)\log_3 n}}{((n-1)!)^2\,4^{(n-2)\log_4 n} - ((n-2)!)^2\,6^{(n+1)\log_6 n}} = \dfrac{((n+1)!)^2 n^n - (n!)^2 n^{n-1}}{((n-1)!)^2 n^{n-2} - ((n-2)!)^2 n^{n+1}} \overset{(a)}{=} \dfrac{(n+1)^2 n^2 (n-1)^2 n^2 - n^2(n-1)^2 n}{(n-1)^2 + n^3} = \dfrac{n^8(1+o(1))}{n^3(1+o(1))} = n^5(1+o(1))$, dove in (a) si è diviso numeratore e denominatore per $((n-2)!)^2\,n^{n-2}$. L'ordine di infinito di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è 5.

(11) Si ha $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}(1+o(1))$, e l'ordine di infinitesimo di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è $\frac{1}{2}$.

(12) Si ha $a_n = \dfrac{\sqrt{n}+n^{7/3}}{n^5+n^3+8} = \dfrac{n^{7/3}(1+o(1))}{n^5(1+o(1))} = \dfrac{1}{n^{8/3}}(1+o(1))$, e l'ordine di infinitesimo di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è $\frac{8}{3}$.

(13) Si ha $a_n = 2 - \dfrac{2n^2}{n^2+n} = \dfrac{2n}{n^2+n} = \dfrac{2}{n}(1+o(1))$, e l'ordine di infinitesimo di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è 1.

(14) Si ha $a_n = \dfrac{n!}{(n+1)!-(n-1)!} = \dfrac{n}{n^2+n-1} = \dfrac{1}{n}(1+o(1))$, e l'ordine di infinitesimo di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è 1.

(15) Si ha $a_n = \dfrac{(n^2+1)(7^{n!}+3^{n^2})}{(7^{n!}+9^{n^2+n})(n^3+\log_4 n)} = \dfrac{n^2 7^{n!}(1+o(1))}{n^3 7^{n!}(1+o(1))} = \dfrac{1}{n}(1+o(1))$. L'ordine di infinitesimo di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è 1.

(16) Si ha $a_n = \dfrac{n^{2(n+4)}\,n! - (n-1)!\,n^{2n+7}}{(n+1)!\,n^{2n+9} + (n^2)^n\,(n+2)!} \overset{(a)}{=} \dfrac{n^8\,n - n^7}{(n+1)n\,n^9 + (n+2)(n+1)n} = \dfrac{n^9(1+o(1))}{n^{11}(1+o(1))} = \dfrac{1}{n^2}(1+o(1))$, dove in (a) si è diviso numeratore e denominatore per $(n-1)!\,n^{2n}$. L'ordine di infinitesimo di $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è 2.

$\square$

Svolgimento esercizio 5

(1) Si ha $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n = \sqrt{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}} \to \sqrt{e}$, sfruttando la continuità di $x \to \sqrt{x}$.

(2) Si ha $\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)^n = \sqrt{\dfrac{\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1}}{1+\frac{1}{2n+1}}} \to \sqrt{e}$, sfruttando la continuità di $x \to \sqrt{x}$.

(3) Si ha $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)^2 \to e^2$.

(4) Si ha $\dfrac{(n+1)^n}{n^n+3} = \dfrac{(n+1)^n}{n^n(1+o(1))} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n(1+o(1)) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n(1+o(1)) \to e$.

(5) Si ha $\dfrac{(n+1)^n}{n^n+n^2} = \dfrac{(n+1)^n}{n^n(1+o(1))} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n(1+o(1)) \to e$.

(6) Si ha $\dfrac{(2n+1)^n}{(2n)^n+n^4} = \dfrac{(2n+1)^n}{(2n)^n(1+o(1))} = \left(\dfrac{2n+1}{2n}\right)^n(1+o(1)) = \left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n(1+o(1)) \to \sqrt{e}$, usando il risultato dell'esercizio (1).

(7) Si ha $\dfrac{(2n)^n+2^n}{(2n+1)^n} = \dfrac{(2n)^n(1+o(1))}{(2n+1)^n} \to \dfrac{1}{\sqrt{e}}$, usando il risultato dell'esercizio (6).

(8) Si ha $\dfrac{(2n+1)^n}{2n^n+1} = \dfrac{(2n+1)^n}{2n^n(1+o(1))} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)^n(1+o(1)) = \dfrac{1}{2}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^n(1+o(1)) \to +\infty$, perché $\left(2+\frac{1}{n}\right)^n \geq 2^n \to +\infty$.

(9) Si ha $(n+1)^n - n! = n^n\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n - n! = en^n(1+o(1)) - n! = en^n(1+o(1)) \to +\infty$.

(10) Si ha $(n+1)^{n+1} - n^{n+1} = n^{n+1}\left\{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1} - 1\right\} = n^{n+1}\big(e+o(1)-1\big) = (e-1)n^{n+1}(1+o(1)) \to +\infty$.

(11) Si ha $\dfrac{(n+1)^{n+1} - n^{n+1}}{(n-1)^{n+1} - n!} \overset{(a)}{=} \dfrac{(e-1)n^{n+1}(1+o(1))}{n^{n+1}(1-\frac{1}{n})^n(1-\frac{1}{n}) - n!} = \dfrac{(e-1)(1+o(1))}{e^{-1}(1+o(1)) + o(1)} \to e(e-1)$, dove in (a) si è usato lo sviluppo asintotico dell'esercizio (10).

(12) Si ha $(n+1)^{n!} - n^{2n} = (n+1)^{n!}\left\{1 - \left(\dfrac{n^2}{(n+1)^{(n-1)!}}\right)^n\right\} = (n+1)^{n!}(1+o(1)) \to +\infty$, poiché $\frac{n^2}{(n+1)^{(n-1)!}} \to 0$.

(13) Si ha $\dfrac{(n+1)^n+n!}{n^n+5^n-n!}=\dfrac{(n+1)^n(1+o(1))}{n^n(1+o(1))}=\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^n(1+o(1))\to e.$

(14) Si ha $\dfrac{(2n+1)^n+n!+1}{(2n+2)^n-n!+n^2}=\dfrac{(2n+1)^n(1+o(1))}{(2n+2)^n(1+o(1))}=\Big(\Big(\dfrac{2n+2}{2n+1}\Big)^n\Big)^{-1}(1+o(1))=$
$=\Big(\Big(1+\dfrac{1}{2n+1}\Big)^n\Big)^{-1}(1+o(1))\to\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, usando il risultato dell'esercizio (2).

(15) Si ha $\dfrac{(2n+1)^n+(2n)^n}{(2n+2)^n-(2n+1)^n}=\dfrac{1+\frac{(2n)^n}{(2n+1)^n}}{\frac{(2n+2)^n}{(2n+1)^n}+1}=\dfrac{1+\big((\frac{2n+1}{2n})^n\big)^{-1}}{(\frac{2n+2}{2n+1})^n+1}=\dfrac{1+\big((1+\frac{1}{2n})^n\big)^{-1}}{(1+\frac{1}{2n+1})^n+1}\to\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{e}}}{\sqrt{e}+1}=$
$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, usando i risultati degli esercizi (1) e (2).

(16) Si ha $\dfrac{n^{n-3}+(n-3)^n}{6n^n+7n^{n/2}}=\dfrac{n^{-3}+(1-\frac{3}{n})^n}{6+o(1)}\to\dfrac{1}{6e^3}.$

(17) Si ha $\dfrac{(3n)^n-n^{3n}}{(n-1)^{3n}+(n+3)!}\overset{(a)}{=}\dfrac{-n^{3n}(1+o(1))}{(n-1)^{3n}+o(1)}=-\Big(\dfrac{n}{n-1}\Big)^{3n}(1+o(1))\to-e^{-3}$, dove in (a) si sono usati i risultati $\dfrac{3^nn^n}{n^{3n}}=\dfrac{3^n}{n^{2n}}\to0$, e $\dfrac{(n+3)!}{(n-1)^{3n}}=\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{(n-1)^{2n}}\cdot\dfrac{(n-1)!}{(n-1)^n}\to0.$

(18) Si ha $\big(\sqrt{1+e^{-n}}-1\big)\big(e^n-3^n+n^2\big)=\dfrac{e^{-n}}{\sqrt{1+e^{-n}}+1}\big(e^n-3^n+n^2\big)=\dfrac{e^{-n}}{2(1+o(1))}e^n(1+o(1))=$
$\dfrac{1}{2}(1+o(1))\to\dfrac{1}{2}.$

(19) Si ha $\dfrac{(e^n+1)(n+\log n)}{(e^n+2^n)(2+\log n^6)}=\dfrac{e^n(1+o(1))n(1+o(1))}{e^n(1+o(1))6\log n(1+o(1))}=\dfrac{n}{6\log n}(1+o(1))\to+\infty.$

(20) Si ha $\dfrac{(n^2+5n+7)e^{1/n}}{(n+1)(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})}=\dfrac{n^2(1+o(1))}{n(1+o(1))}\dfrac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{3}=n(1+o(1))\cdot2\sqrt{n}(1+o(1))=$
$2n^{3/2}(1+o(1))\to+\infty.$

(21) Si ha $\sqrt[n]{2n}=\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}\to1.$

(22) Si ha $\sqrt[n]{n^3}=\big(\sqrt[n]{n}\big)^3\to1.$

(23) Intanto $\sqrt[2n+1]{-n}=-\sqrt[2n+1]{n}$. Poi $1\le\sqrt[2n+1]{n}\le\sqrt[2n+1]{2n+1}\to1$. Per il teorema dei due carabinieri, si ha $\sqrt[2n+1]{n}\to1$, e quindi $\sqrt[2n+1]{-n}\to-1$.

(24) Intanto $\sqrt[n]{n^2+3}=\sqrt[n]{n^2\Big(1+\frac{3}{n^2}\Big)}=\big(\sqrt[n]{n}\big)^2\sqrt[n]{1+\frac{3}{n^2}}$. Poi, definitivamente si ha $1\le\sqrt[n]{1+\frac{3}{n^2}}\le\sqrt[n]{2}\to1$. Per il teorema dei due carabinieri, si ha $\sqrt[n]{1+\dfrac{3}{n^2}}\to1$, e quindi $\sqrt[n]{n^2+3}=\big(\sqrt[n]{n}\big)^2\sqrt[n]{1+\frac{3}{n^2}}\to1$.

(25) Intanto $\sqrt[n]{2^n+n^2}=\sqrt[n]{2^n\Big(1+\frac{n^2}{2^n}\Big)}=2\sqrt[n]{1+\frac{n^2}{2^n}}$. Poi, definitivamente si ha $1\le\sqrt[n]{1+\frac{n^2}{2^n}}\le\sqrt[n]{2}\to1$. Per il teorema dei due carabinieri, si ha $\sqrt[n]{1+\dfrac{n^2}{2^n}}\to1$, e quindi $\sqrt[n]{2^n+n^2}=2\sqrt[n]{1+\frac{n^2}{2^n}}\to2$.

(26) Intanto $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}(1+o(1))} \to \frac{1}{2}$. Inoltre, $\sqrt[n]{2^{n+1}+n^2} = \sqrt[n]{2^{n+1}\Big(1+\frac{n^2}{2^{n+1}}\Big)} = 2\sqrt[n]{2}\sqrt[n]{1+\frac{n^2}{2^{n+1}}}$. Poi, definitivamente si ha $1 \le \sqrt[n]{1+\frac{n^2}{2^{n+1}}} \le \sqrt[n]{2} \to 1$. Per il teorema dei due carabinieri, si ha $\sqrt[n]{1+\dfrac{n^2}{2^{n+1}}} \to 1$, e quindi $\big(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\big)\sqrt[n]{2^{n+1}+n^2} \to 1$.

(27) Si ha $\dfrac{(n^2+5n+7)e^{1/n}}{(n+1)(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})} = \dfrac{n^2(1+o(1))}{n(1+o(1))}\dfrac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}{3} = n(1+o(1))\cdot 2\sqrt{n}(1+o(1)) = 2n^{3/2}(1+o(1)) \to +\infty$.

(28) Si ha $n^2(2n+\sqrt{n})^{1/n} - \cos(n^3) = n^2\sqrt[n]{2n}\Big(1+\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\Big)^{1/n} - \cos(n^3) = n^2(1+o(1)) - \cos(n^3) = n^2(1+o(1)) \to +\infty$, poiché $1 \le (1+\frac{1}{2\sqrt{n}})^{1/n} \le 2^{1/n} \to 1$.

(29) Si ha $\big(4n^n-(n+1)^n\big)^{1/n} = n\Big\{4-\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^n\Big\}^{1/n} = n(4-e+o(1))^{1/n} = n(1+o(1)) \to +\infty$, poiché $1 \le (4-e+o(1))^{1/n} \le 4^{1/n} \to 1$.

(30) Si ha $\big((n+1)^{n+1}-n^{n+1}\big)^{1/n} = n\sqrt[n]{n}\Big\{\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^{n+1}-1\Big\}^{1/n} = n(1+o(1))(e+o(1)-1)^{1/n} = n(1+o(1)) \to +\infty$, poiché $1 \le (e-1+o(1))^{1/n} \le e^{1/n} \to 1$.

$\square$

Svolgimento esercizio 6

(1) Si ha $\dfrac{n!}{n^{n/2}} = \dfrac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))}{n^{n/2}} = n^{n/2}e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1)) = \sqrt{\dfrac{n^n}{e^{2n}}}\sqrt{2\pi n}(1+o(1)) \to +\infty$.

(2) Si ha $\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))} = \dfrac{n}{e}\big(\sqrt[n]{2\pi n}\big)^{1/2}(1+o(1)) \to +\infty$, in quanto $\sqrt[n]{2\pi n} \to 1$, e $\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \le \sqrt[n]{1+o(1)} \le \sqrt[n]{2}$, definitivamente, per cui $\sqrt[n]{1+o(1)} \to 1$.

(3) Si ha $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))} = \dfrac{1}{e}\big(\sqrt[n]{2\pi n}\big)^{1/2}(1+o(1)) \to \dfrac{1}{e}$.

(4) Si ha $\dfrac{\sqrt[2n]{n!}}{n} = \dfrac{1}{n}\Big(\sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))}\Big)^{1/2} = \dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{n}{e}}\big(\sqrt[n]{2\pi n}\big)^{1/4}(1+o(1)) \to 0$.

(5) Si ha $\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}} = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\dfrac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi\cdot 2n}(1+o(1))}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))}} = \dfrac{1}{n}\dfrac{4n}{e}\sqrt[n]{\sqrt{2}(1+o(1))} \to \dfrac{4}{e}$.

(6) $\sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}} = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n!}} = \sqrt[n]{\dfrac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{2\pi\cdot 2n}(1+o(1))}{n^{2n}e^{-2n}2\pi n(1+o(1))}} = \dfrac{4}{(\sqrt[n]{\pi n})^{1/2}}(1+o(1)) \to 4$.

(7) $\sqrt[n]{\dbinom{4n}{2n}} = \sqrt[n]{\dfrac{(4n)!}{(2n)!\cdot(2n)!}} = \sqrt[n]{\dfrac{(4n)^{4n}e^{-4n}\sqrt{2\pi\cdot 4n}(1+o(1))}{(2n)^{4n}e^{-4n}2\pi\cdot 2n(1+o(1))}} = \dfrac{16}{(\sqrt[n]{2\pi n})^{1/2}}(1+o(1)) \to 16$.

$\square$

Analisi Matematica I
Limiti di funzioni e continuità

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti, verificandoli, poi, con la definizione.

(1) $\lim_{x\to 2} \sqrt{|x-2|+3}$

(2) $\lim_{x\to 3} \log(1+|x-1|)$

(3) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{|x-1|}$

(4) $\lim_{x\to +\infty} \left(2+\frac{3}{x^2-1}\right)$

(5) $\lim_{x\to -\infty} \left(2+\frac{3}{x^2-1}\right)$

Esercizio 2. Calcolare i limiti delle seguenti funzioni sia per $x \to 0^+$ sia per $x \to +\infty$.

(1) $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x(x^2+1)}$

(2) $\frac{x(\sqrt{1+x}-1)}{x^2+1}$

(3) $\frac{\sqrt{1+x}-e^x}{x^2(1+3^x)}$

(4) $\frac{(\sqrt{1+x}-e^x)^2}{x(1+3^x)}$

(5) $\frac{(\sqrt{1+x}-1)(e^x-1)}{x^2(1+2^x)}$

(6) $\frac{\log(1+x^2)+x}{x(1+x^2)}$

(7) $\frac{\log(1+x^2)+x\log x}{x(1+\log x)}$

(8) $\frac{\log(1+x^2)+x^2}{x\log x}$

(9) $\frac{\log(1+x^2)+x^2}{x^2\log x}$

(10) $\frac{\log(1+x^2)+x^2}{x^3\log x}$

(11) $\frac{\log(1+x)}{e^x-\sqrt{1+x}}$

(12) $\frac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{\log(x^2+1)}$

(13) $\frac{(1+\sqrt[3]{x})^2-e^x}{x^2+\log(1+x)}$

(14) $\log x \cdot \log\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)$

(15) $\dfrac{(\log x)^2}{\log(1+x)}$

(16) $\dfrac{(\log x)^2 \log(1+x^2)}{\log(1+x)}$

(17) $\sqrt[3]{\sqrt{x+1}-1} \cdot \log x$

(18) $\sqrt{x}\Big(\log x + \log\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)\Big)$

(19) $\dfrac{e^{-x}-1+\sin(x^2)}{|\log x| + \log\Big(1+\frac{1}{x}\Big)}$

(20) $\dfrac{\sin(x^2+x\sqrt{x})+x^3}{x^{3/2}+x^2}$

(21) $\dfrac{(e^x-\sqrt{|\cos x|}\,)\cdot \operatorname{arctg} x}{(x^2+|\sin x|)^2}$

(22) $\dfrac{\sqrt[5]{1-\cos x}\cdot \sin x \cdot \log x}{\sqrt[6]{x}(e^x-1)}$

Esercizio 3. Calcolare i limiti delle seguenti funzioni per $x \to x_0$. In caso di funzioni infinite/infinitesime, determinarne l'ordine, se esiste.

(1) $f(x) = \dfrac{e^{x^2-1}-1}{\sqrt{\log x}} \qquad x \to 1^+$

(2) $f(x) = \dfrac{(e^{x^2-1}-1)\log(x-1)}{\sqrt{\log x}} \qquad x \to 1^+$

(3) $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)^3}{\sin(x-1)} \qquad x \to 1$

(4) $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)^3\log(x-1)}{\sin(x-1)} \qquad x \to 1^+$

(5) $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x}-1)e^{\frac{1}{1-x}}}{\sin(x-1)} \qquad x \to 1^+$

(6) $f(x) = \log(1+e^x-e^2) \qquad x \to 2$

(7) $f(x) = \dfrac{\log(1+e^x-e^2)}{\sqrt{2x}-2} \qquad x \to 2$

(8) $f(x) = \dfrac{\log(\cos x + x^3)}{x\sin x + x^5} \qquad x \to 0$

Esercizio 4. Determinare gli eventuali asintoti orizzontali od obliqui delle funzioni che seguono.

(1) $f(x) = \dfrac{2x^2+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}} \qquad x \to +\infty$

(2) $f(x) = \dfrac{2x^3 + 3x^{3/2} + 3}{3(x+5)^2 + \sqrt{x}} \qquad x \to +\infty$

(3) $f(x) = \log\Big(\dfrac{2x^3 + 3x^{3/2} + 3}{3(x+5)^2 + \sqrt{x}}\Big) \qquad x \to +\infty$

(4) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+5x-4}-x} \qquad x \to +\infty$

(5) $f(x) = e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2x \qquad x \to +\infty$

(6) $f(x) = \log(2e^{x+1} + 3x^{10}) \qquad x \to +\infty$

(7) $f(x) = \log(x^{12}e^x + |x|) \qquad x \to -\infty$

(8) $f(x) = \log(x^{12}e^x + 3e^{-x}) \qquad x \to -\infty$

(9) $f(x) = \log(x^{12}e^{-x} + 1) \qquad x \to -\infty$

(10) $f(x) = e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2|x| \qquad x \to -\infty$

Esercizio 5. Determinare, se esiste, l'ordine di infinito delle seguenti funzioni.

(1) $f(x) = \dfrac{\log x - \log(x^3+7)}{\log(5x)} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-x} \qquad x \to +\infty$

(2) $f(x) = \dfrac{3x^2 \operatorname{tg}\Big(\frac{1}{x}\Big) + x^3 \log\Big(\frac{x+1}{x}\Big)}{(\operatorname{arctg} x)(\sqrt{x^4+3x} - x^2)} \qquad x \to +\infty$

(3) $f(x) = x^4 + x\sin x - e^{1/x} \qquad x \to +\infty$

(4) $f(x) = \log\Big(\dfrac{x^2+x^3}{1+x+x^2}\Big) + 3x^6 \qquad x \to +\infty$

(5) $f(x) = \Big(1 - \cos\Big(\dfrac{1}{x}\Big)\Big)(1+x^3) \qquad x \to +\infty$

(6) $f(x) = \log(1 + 2x^4 + e^{2x}) \qquad x \to +\infty$

(7) $f(x) = \dfrac{3^{1/x} - 1}{\operatorname{arctg}\Big(\frac{1}{x^4}\Big)} \qquad x \to +\infty$

(8) $f(x) = \dfrac{\log(x^4 + 4x^3)}{x^{1/x} - 1} \qquad x \to +\infty$

(9) $f(x) = \dfrac{x}{|x-1|} \qquad x \to 1$

(10) $f(x) = \dfrac{x}{|x^2-1|} \qquad x \to 1$

(11) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \qquad x \to 1^+$

(12) $f(x) = \dfrac{\sin x \log(9+x)}{e^{x^3} - \cos x} \qquad x \to 0$

(13) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\log x} \qquad x \to 0^+$

(14) $f(x) = \dfrac{\arcsin(x^2 + x\log x)}{(5x - \log x)(x^2 + e^{-1/x})} \qquad x \to 0^+$

(15) $f(x) = \dfrac{e^{x^2} - e^x}{1 - \cos x} \qquad x \to 0^+$

(16) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x^2} \qquad x \to 0$

(17) $f(x) = (1 + x)^{1/x^2} \qquad x \to 0^+$

(18) $f(x) = \left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)^{e^{2x}} \qquad x \to 0^+$

(19) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x^5} \log\left(1 + x^4 \sin \frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^2} \log x}{\operatorname{tg} x + \arcsin x^2} \qquad x \to 0$

Esercizio 6. Determinare, se esiste, l'ordine di infinitesimo delle seguenti funzioni.

(1) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x} \qquad x \to 0$

(2) $f(x) = \dfrac{x}{\cos x} \qquad x \to 0$

(3) $f(x) = \dfrac{x}{x+1} \sin x \qquad x \to 0$

(4) $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x} \qquad x \to 0$

(5) $f(x) = \dfrac{\sin x}{3\sqrt{x}} \qquad x \to 0^+$

(6) $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|} \qquad x \to 0$

(7) $f(x) = \dfrac{\log(1 + x^3)}{x} \qquad x \to 0$

(8) $f(x) = \dfrac{\log(1 + x^2)}{e^x - 1} \qquad x \to 0$

(9) $f(x) = \dfrac{x^2 + \operatorname{arctg} x}{x \log x + e^{x^2} - 1} \qquad x \to 0^+$

(10) $f(x) = \dfrac{e^x - \cos x}{\operatorname{arctg} \sqrt{x} + \sin x} \qquad x \to 0^+$

(11) $f(x) = 1 - |\log x|^{\frac{1}{|\log x|}} \qquad x \to 0^+$

(12) $f(x) = (x - 1) \log x \qquad x \to 1$

(13) $f(x) = \dfrac{\sin \sqrt{x - 2} + (x - 2)^2}{\sqrt[4]{x - 2} + 1 - \cos \pi x} \qquad x \to 2^+$

(14) $f(x) = \dfrac{\sin x - 1}{2x - \pi} \qquad x \to \pi/2$

(15) $f(x) = (\sqrt{x + 1} - \sqrt{x - 1}) \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \qquad x \to +\infty$

(16) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^4 + 3\sqrt{x}} \qquad x \to +\infty$

(17) $f(x) = \cos(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) - 1 \qquad x \to +\infty$

(18) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 1}{x^3 + 1} \cdot \dfrac{1 - e^{\cos(1/x)}}{\operatorname{arctg}(x \log x)} \qquad x \to +\infty$

Esercizio 7. Calcolare il limite per $n \to +\infty$ delle seguenti successioni

(1) $a_n = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + \sqrt{n}}\right)$

(2) $a_n = n \sin\left(\dfrac{n^2(n-1) - 3}{n}\pi\right)$.

(3) $a_n = (2^n - n!) \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(n!)\right)$.

(4) $a_n = (3^n - n!) \cos\left(\pi + \operatorname{arctg}(n!)\right)$.

(5) $a_n = \dfrac{n^{n+1} + 2 \cdot n!}{(n-1)^n + 2n^n} \operatorname{tg}\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

(6) $a_n = \dfrac{e^{n + \log n} + n \sin(n!)}{e^{n+1} + n^2} \operatorname{tg}\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)$.

(7) $a_n = \cos n \cdot \log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

(8) $a_n = \dfrac{\log(1 + e^n)}{n}$

(9) $a_n = \log\left(1 + \dfrac{\pi^n}{n!}\right)$

(10) $a_n = \dfrac{\log(3^n + \pi^n)}{2n}$

(11) $a_n = \dfrac{\log(4^n + \pi^n)}{2n + \log n}$

(12) $a_n = \dfrac{(3 + n! + \pi^{3n})(n + \sqrt{n})}{(2 \cdot n! + 3)\log(1 + n^n)}$

(13) $a_n = \log(n + \sqrt{n^2 + 1}) - \log n$

(14) $a_n = \log(n - \sqrt{n^2 - 1}) + \log n$

(15) $a_n = \dfrac{\log(n^2 + 1) - \log n}{\log(2n)}\left(n^2 + n^{3/2}\log n - 2\sqrt{n}\right)$

(16) $a_n = \dfrac{\log((n+6)!) - \log(n! + n^7)}{\log(6n^8 + \sin\frac{n\pi}{2})}$

(17) $a_n = 2^{n+1} - 2^{\sqrt{n^2 - 1}}$

(18) $a_n = \sqrt[n]{n^3}$

(19) $a_n = \sqrt[2n+1]{-n}$

(20) $a_n = \sqrt[n]{n^2 + 3}$

(21) $a_n = \sqrt[n]{2^n + n^2}$

(22) $a_n = \left(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}\right) \sqrt[n]{2^{n+1}+n^2}$

(23) $a_n = \Big(\dfrac{2n+1}{3n+4}\Big)^{n/3}$

(24) $a_n = \Big(\dfrac{2n+1}{3n+4}\Big)^{3/n}$

(25) $a_n = \Big(\dfrac{3n+4}{2n+1}\Big)^{n}$

(26) $a_n = (\sqrt[n]{2}-1)^n$

(27) $a_n = \Big(1+\dfrac{1}{n!}\Big)^{n^n}$

(28) $a_n = \Big(1+\dfrac{1}{n^n}\Big)^{n!}$

(29) $a_n = \dfrac{(2n+1)^n + n^n}{(2n+2)^n - n^n}$

(30) $a_n = n^2(2n+\sqrt{n}\,)^{1/n} - \cos(n^3)$

(31) $a_n = \big(4n^n - (n+1)^n\big)^{1/n}$

(32) $a_n = \big((n+1)^{n+1} - n^{n+1}\big)^{1/n}$

(33) $a_n = \dfrac{(n^2-1)^n\ \sin(\frac{\pi n+1}{4n-1})}{(n-2)^{2n} + \operatorname{arctg}(n! - 2^n)}$

(34) $a_n = \dfrac{(3n^{2n^2} - (n^2+1)^{n^2})^2 + 4n^{n^2}}{(n^2+5)^{2n^2} + 6(n^2)^{n^2+n}}$

(35) $a_n = \dfrac{((n+1)!)^{2n}((7\cdot n!)^{3/n!}-1)}{n^{2n}\log((n!)^6)((n!)^{2n-1}+n^2)}.$

(36) $a_n = \dfrac{\log((n!)^2)((n!)^{3n-1}+n^3)}{(n!)^{3n}((8\cdot n!)^{2/n!}-1)}.$

(37) $a_n = \dfrac{n^{3n}\log((n!)^2)(n!)^{3n-1}}{(((n+1)!)^{3n}+n^3)((8\cdot n!)^{2/n!}-1)}.$

(38) $a_n = \dfrac{\log(n!)}{n\log n}$

(39) $a_n = ((n-1)!)^{1/n^3}$

(40) $a_n = \dfrac{((n+1)!)^{1/n^3} - ((n-1)!)^{1/n^3}}{\log(n^4+n)\operatorname{tg}(\frac{1}{2n^3})}.$

Analisi Matematica I
Limiti di funzioni e continuità (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Verifichiamo che $\lim_{x\to 2}\sqrt{|x-2|}+3=3$. Infatti, per ogni $\varepsilon>0$, si ha $|\sqrt{|x-2|}+3-3|<\varepsilon \iff \sqrt{|x-2|}<\varepsilon \iff |x-2|<\varepsilon^2$, e quindi possiamo prendere $\delta_\varepsilon:=\varepsilon^2$.

(2) Verifichiamo che $\lim_{x\to 3}\log(1+|x-1|)=\log 3$. Infatti, per ogni $\varepsilon>0$, si ha $|\log(1+|x-1|)-\log 3|<\varepsilon \iff |\log x-\log 3|<\varepsilon \iff \log 3-\varepsilon<x<\log 3+\varepsilon \iff 3e^{-\varepsilon}<x<3e^{\varepsilon} \iff 3(e^{-\varepsilon}-1)<x-3<3(e^{\varepsilon}-1)$, e quindi possiamo prendere $\delta_\varepsilon:=\min\{3(1-e^{-\varepsilon}),3(e^{\varepsilon}-1)\}$.

(3) Verifichiamo che $\lim_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|}=+\infty$. Infatti, per ogni $M>0$, si ha $\frac{1}{|x-1|}>M \iff |x-1|<\frac{1}{M}$, e quindi possiamo prendere $\delta_M:=\frac{1}{M}$.

(4) Verifichiamo che $\lim_{x\to+\infty}(2+\frac{3}{x^2-1})=2$. Infatti, per ogni $\varepsilon>0$, si ha, se $x>1$, che $\left|2+\frac{3}{x^2-1}-2\right|<\varepsilon \iff \frac{3}{x^2-1}<\varepsilon \iff x^2>\frac{3}{\varepsilon}+1 \iff x>\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}+1}$, e quindi possiamo prendere $x_\varepsilon:=\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}+1}$.

(5) Verifichiamo che $\lim_{x\to-\infty}(2+\frac{3}{x^2-1})=2$. Infatti, per ogni $\varepsilon>0$, si ha, se $x<-1$, che $\left|2+\frac{3}{x^2-1}-2\right|<\varepsilon \iff \frac{3}{x^2-1}<\varepsilon \iff x^2>\frac{3}{\varepsilon}+1 \iff x<-\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}+1}$, e quindi possiamo prendere $x_\varepsilon:=-\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}+1}$.

$\square$

Svolgimento esercizio 2

(1) Si ha, per $x\to 0^+$, $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x(x^2+1)}=\dfrac{\frac{1}{2}x(1+o(1))}{x(1+o(1))}=\dfrac{1}{2}(1+o(1))\to\dfrac{1}{2}$, mentre, per $x\to+\infty$, $\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x(x^2+1)}=\dfrac{\sqrt{x}(1+o(1))}{x^3(1+o(1))}=\dfrac{1}{x^{5/2}}(1+o(1))\to 0$.

(2) Si ha, per $x\to 0^+$, $\dfrac{x(\sqrt{1+x}-1)}{x^2+1}=\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x(1+o(1))}{1+o(1)}=\dfrac{1}{2}x^2(1+o(1))\to 0$, mentre, per $x\to+\infty$, $\dfrac{x(\sqrt{1+x}-1)}{x^2+1}=\dfrac{x\sqrt{x}(1+o(1))}{x^2(1+o(1))}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}(1+o(1))\to 0$.

(3) Si ha, per $x\to 0^+$, $\dfrac{\sqrt{1+x}-e^x}{x^2(1+3^x)}=\dfrac{1+\frac{1}{2}x+o(x)-(1+x+o(x))}{x^2(2+o(1))}=-\dfrac{1}{4x}(1+o(1))\to-\infty$, mentre, per $x\to+\infty$, $\dfrac{\sqrt{1+x}-e^x}{x^2(1+3^x)}=\dfrac{-e^x(1+o(1))}{x^2 3^x(1+o(1))}=-\dfrac{1}{x^2}\Big(\dfrac{e}{3}\Big)^x(1+o(1))\to 0$.

(4) Si ha, per $x\to 0^+$, $\dfrac{(\sqrt{1+x}-e^x)^2}{x(1+3^x)}=\dfrac{\big(1+\frac{1}{2}x+o(x)-(1+x+o(x))\big)^2}{x(2+o(1))}=\dfrac{\big(-\frac{1}{2}x(1+o(1))\big)^2}{x(2+o(1))}=\dfrac{1}{8}x(1+o(1))\to 0$, mentre, per $x\to+\infty$, $\dfrac{(\sqrt{1+x}-e^x)^2}{x(1+3^x)}=\dfrac{(-e^x)^2(1+o(1))}{x3^x(1+o(1))}=\dfrac{1}{x}\Big(\dfrac{e^2}{3}\Big)^x(1+o(1))\to+\infty$.

(5) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(e^x-1)}{x^2(1+2^x)} = \dfrac{\frac{1}{2}x(1+o(1))\cdot x(1+o(1))}{x^2(2+o(1))} = \dfrac{1}{4}(1+o(1)) \to \dfrac{1}{4}$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)(e^x-1)}{x^2(1+2^x)} = \dfrac{\sqrt{x}\cdot e^x(1+o(1))}{x^2 2^x(1+o(1))} = \dfrac{1}{x^{3/2}}\Big(\dfrac{e}{2}\Big)^x(1+o(1)) \to +\infty$.

(6) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x}{x(1+x^2)} = \dfrac{x^2(1+o(1))+x}{x(1+o(1))} = \dfrac{x(1+o(1))}{x(1+o(1))} \to 1$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x}{x(1+x^2)} = \dfrac{2\log x(1+o(1))+x}{x^3(1+o(1))} = \dfrac{x(1+o(1))}{x^3(1+o(1))} = \dfrac{1}{x^2} \to 0$.

(7) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x\log x}{x(1+\log x)} = \dfrac{x^2(1+o(1))+x\log x}{x\log x(1+o(1))} = \dfrac{x\log x(1+o(1))}{x\log x(1+o(1))} \to 1$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x\log x}{x(1+\log x)} = \dfrac{2\log x(1+o(1))+x\log x}{x\log x(1+o(1))} = \dfrac{x\log x(1+o(1))}{x\log x(1+o(1))} \to 1$.

(8) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x^2}{x\log x} = \dfrac{x^2(1+o(1))+x^2}{x\log x} = \dfrac{2x^2(1+o(1))}{x\log x} = \dfrac{2x}{\log x}(1+o(1)) \to 0$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x^2}{x\log x} = \dfrac{2\log x(1+o(1))+x^2}{x\log x} = \dfrac{x^2(1+o(1))}{x\log x} = \dfrac{x}{\log x}(1+o(1)) \to +\infty$.

(9) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x^2}{x^2\log x} = \dfrac{x^2(1+o(1))+x^2}{x^2\log x} = \dfrac{2x^2(1+o(1))}{x^2\log x} = \dfrac{2}{\log x}(1+o(1)) \to 0$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x^2}{x^2\log x} = \dfrac{2\log x(1+o(1))+x^2}{x^2\log x} = \dfrac{x^2(1+o(1))}{x^2\log x} = \dfrac{1}{\log x}(1+o(1)) \to 0$.

(10) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x^2}{x^3\log x} = \dfrac{x^2(1+o(1))+x^2}{x^3\log x} = \dfrac{2x^2(1+o(1))}{x^3\log x} = \dfrac{2}{x\log x}(1+o(1)) \to -\infty$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{\log(1+x^2)+x^2}{x^3\log x} = \dfrac{2\log x(1+o(1))+x^2}{x^3\log x} = \dfrac{x^2(1+o(1))}{x^3\log x} = \dfrac{1}{x\log x}(1+o(1)) \to 0$.

(11) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{\log(1+x)}{e^x-\sqrt{1+x}} = \dfrac{x(1+o(1))}{1+x+o(x)-\big(1+\frac{1}{2}x+o(x)\big)} = \dfrac{x(1+o(1))}{\frac{1}{2}x(1+o(1))} \to 2$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{\log(1+x)}{e^x-\sqrt{1+x}} = \dfrac{\log x(1+o(1))}{e^x-\sqrt{x}(1+o(1))} = \dfrac{\log x(1+o(1))}{e^x(1+o(1))} \to 0$.

(12) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{\log(x^2+1)} = \dfrac{\frac{x^2}{4}(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} \to \dfrac{1}{4}$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{(\sqrt{1+x}-1)^2}{\log(x^2+1)} = \dfrac{x(1+o(1))}{2\log x(1+o(1))} \to +\infty$.

(13) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{(1+\sqrt[3]{x})^2-e^x}{x^2+\log(1+x)} = \dfrac{1+2\sqrt[3]{x}+o(x^{2/3})-(1+x+o(x))}{x^2+x(1+o(1))} = \dfrac{2\sqrt[3]{x}(1+o(1))}{x(1+o(1))} = \dfrac{2}{x^{2/3}}(1+o(1)) \to +\infty$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{(1+\sqrt[3]{x})^2-e^x}{x^2+\log(1+x)} = \dfrac{x^{2/3}(1+o(1))-e^x}{x^2+\log x(1+o(1))} = \dfrac{-e^x(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} \to -\infty$.

(14) Si ha, per $x \to 0^+$, $\log x\cdot\log\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big) = \log x\cdot\log\Big(\dfrac{1}{x}(1+o(1))\Big) = -(\log x)^2(1+o(1)) \to -\infty$, mentre, per $x \to +\infty$, $\log x\cdot\log\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big) = \log x\cdot\dfrac{1}{x}(1+o(1)) \to 0$.

(15) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{(\log x)^2}{\log(1+x)} = \dfrac{(\log x)^2}{x(1+o(1))} \to +\infty$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{(\log x)^2}{\log(1+x)} = \dfrac{(\log x)^2}{\log x(1+o(1))} = \log x(1+o(1)) \to +\infty$.

(16) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{(\log x)^2 \log(1+x^2)}{\log(1+x)} = \dfrac{(\log x)^2 \cdot x^2(1+o(1))}{x(1+o(1))} = x(\log x)^2(1+o(1)) \to 0$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{(\log x)^2 \log(1+x^2)}{\log(1+x)} = \dfrac{(\log x)^2 \cdot 2\log x(1+o(1))}{\log x(1+o(1))} = 2(\log x)^2(1+o(1)) \to +\infty$.

(17) Si ha, per $x \to 0^+$, $\sqrt[3]{\sqrt{x+1}-1} \cdot \log x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}x(1+o(1))} \cdot \log x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} x^{1/3} \log x(1+o(1)) \to 0$, mentre, per $x \to +\infty$, $\sqrt[3]{\sqrt{x+1}-1} \cdot \log x = \sqrt[3]{\sqrt{x}(1+o(1))} \cdot \log x = x^{1/6} \log x(1+o(1)) \to +\infty$.

(18) Si ha, per $x \to 0^+$, $\sqrt{x}\Big(\log x + \log\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)\Big) = \sqrt{x}\log(x+1) = \sqrt{x} \cdot x(1+o(1)) = x^{3/2}(1+o(1)) \to 0$, mentre, per $x \to +\infty$, $\sqrt{x}\Big(\log x + \log\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)\Big) = \sqrt{x}\log(x+1) = x^{1/2}\log x(1+o(1)) \to +\infty$.

(19) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{e^{-x}-1+\sin(x^2)}{|\log x| + \log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{1-x+o(x)-1+x^2+o(x^2)}{-\log x + \log\left(\frac{1}{x}(1+o(1))\right)} = \dfrac{-x+o(x)}{-2\log x(1+o(1))} \to 0$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{e^{-x}-1+\sin(x^2)}{|\log x| + \log\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{e^{-x}-1+\sin(x^2)}{\log x(1+o(1))} \to 0$, perché il numeratore è limitato.

(20) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{\sin(x^2+x\sqrt{x})+x^3}{x^{3/2}+x^2} = \dfrac{\sin(x\sqrt{x}(1+o(1)))+x^3}{x^{3/2}(1+o(1))} = \dfrac{x\sqrt{x}(1+o(1))+x^3}{x^{3/2}(1+o(1))} = \dfrac{x\sqrt{x}(1+o(1))}{x^{3/2}(1+o(1))} \to 1$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{\sin(x^2+x\sqrt{x})+x^3}{x^{3/2}+x^2} = \dfrac{x^3(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = x(1+o(1)) \to +\infty$.

(21) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{(e^x - \sqrt{|\cos x|}\,) \cdot \operatorname{arctg} x}{(x^2+|\sin x|)^2} = \dfrac{(1+x+o(x) - \sqrt{|1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)|}\,) \cdot x(1+o(1))}{(x^2+|x|(1+o(1))\,)^2} = \dfrac{\big(1+x+o(x)-(1-\frac{1}{4}x^2+o(x^2))\big) \cdot x(1+o(1))}{|x|^2(1+o(1))} = \dfrac{x(1+o(1)) \cdot x(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} \to 1$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{(e^x - \sqrt{|\cos x|}\,) \cdot \operatorname{arctg} x}{(x^2+|\sin x|)^2} = \dfrac{e^x(1+o(1)) \cdot \frac{\pi}{2}(1+o(1))}{(x^2(1+o(1)))^2} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{e^x}{x^4}(1+o(1)) \to +\infty$.

(22) Si ha, per $x \to 0^+$, $\dfrac{\sqrt[5]{1-\cos x} \cdot \sin x \cdot \log x}{\sqrt[6]{x}(e^x-1)} = \dfrac{\sqrt[5]{\frac{x^2}{2}(1+o(1))} \cdot x(1+o(1)) \cdot \log x}{\sqrt[6]{x} \cdot x(1+o(1))} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{2}} x^{7/30} \log x(1+o(1)) \to 0$, mentre, per $x \to +\infty$, $\dfrac{\sqrt[5]{1-\cos x} \cdot \sin x \cdot \log x}{\sqrt[6]{x}(e^x-1)} = \sqrt[5]{1-\cos x} \cdot \sin x \dfrac{\log x}{\sqrt[6]{x} \cdot e^x} \to 0$, perché il fattore $\sqrt[5]{1-\cos x} \cdot \sin x$ è limitato, mentre $\frac{\log x}{\sqrt[6]{x} \cdot e^x} \to 0$.

□

Svolgimento esercizio 3

(1) Introdotta la variabile $z = x-1 \to 0^+$, si ha $f(x) = f(1+z) = \frac{e^{z^2+2z}-1}{\sqrt{\log(1+z)}} = \frac{(z^2+2z)(1+o(1))}{\sqrt{z(1+o(1))}} = \frac{2z(1+o(1))}{z^{1/2}(1+o(1))} = 2z^{1/2}(1+o(1)) \to 0$, e l'ordine di infinitesimo è $\frac{1}{2}$.

(2) Introdotta la variabile $z = x-1 \to 0^+$, si ha $f(x) = f(1+z) = \frac{(e^{z^2+2z}-1)\log z}{\sqrt{\log(1+z)}} = \frac{(z^2+2z)(1+o(1))\log z}{\sqrt{z(1+o(1))}} = \frac{2z(1+o(1)\log z)}{z^{1/2}(1+o(1))} = 2z^{1/2}\log z(1+o(1)) \to 0$, e l'ordine di infinitesimo non esiste.

(3) Introdotta la variabile $z = x-1 \to 0$, si ha $f(x) = f(1+z) = \frac{(\sqrt{1+z}-1)^3}{\sin z} = \frac{(\frac{1}{2}z)^3(1+o(1))}{z(1+o(1))} = \frac{1}{8}z^2(1+o(1)) \to 0$, e l'ordine di infinitesimo è 2.

(4) Introdotta la variabile $z = x-1 \to 0^+$, si ha $f(x) = f(1+z) = \frac{(\sqrt{1+z}-1)^3\log z}{\sin z} = \frac{(\frac{1}{2}z)^3(1+o(1))\log z}{z(1+o(1))} = \frac{1}{8}z^2\log z(1+o(1)) \to 0$, e l'ordine di infinitesimo non esiste.

(5) Introdotta la variabile $z = x-1 \to 0^+$, si ha $f(x) = f(1+z) = \frac{(\sqrt{1+z}-1)e^{-\frac{1}{z}}}{\sin z} = \frac{\frac{1}{2}z(1+o(1))e^{-\frac{1}{z}}}{z(1+o(1))} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{z}}(1+o(1)) \to 0$, e l'ordine di infinitesimo non esiste.

(6) Introdotta la variabile $z = x-2 \to 0$, si ha $f(x) = f(2+z) = \log(1+e^{2+z}-e^2) = \log(1+e^2(e^z-1)) = \log\big(1+e^2z(1+o(1))\big) = e^2z(1+o(1)) \to 0$, e l'ordine di infinitesimo è 1.

(7) Introdotta la variabile $z = x-2 \to 0$, si ha $f(x) = f(2+z) = \frac{\log(1+e^{2+z}-e^2)}{\sqrt{2(2+z)}-2} = \frac{1}{2}\frac{\log(1+e^2(e^z-1))}{\sqrt{1+\frac{z}{2}}-1} = \frac{1}{2}\frac{\log\big(1+e^2z(1+o(1))\big)}{\frac{z}{4}(1+o(1))} = 2e^2(1+o(1)) \to 2e^2$, e l'ordine di infinito/infinitesimo non esiste.

(8) Si ha $f(x) = \frac{\log(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+x^3)}{x(x+o(x))+x^5} = \frac{-\frac{1}{2}x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = -\frac{1}{2}(1+o(1)) \to -\frac{1}{2}$, e l'ordine di infinito/infinitesimo non esiste.

$\square$

Svolgimento esercizio 4

(1) Si ha $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2(1+o(1))}{3x^2(1+o(1))} = \frac{2}{3}$, per cui $y = \frac{2}{3}$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to +\infty$.

(2) Si ha $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3(1+o(1))}{3x^2(1+o(1))} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3}(1+o(1)) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \to +\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\frac{2x^3+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\frac{2x}{3}(1+o(1)) = \frac{2}{3}$, e $q := \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}} - \frac{2}{3}x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-20x^2+3x^{3/2}-50x-\frac{2}{3}\sqrt{x}+3}{3x^2+30x+75+\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-20x^2(1+o(1))}{3x^2(1+o(1))} = -\frac{20}{3}$, per cui $y = \frac{2}{3}x - \frac{20}{3}$ è asintoto obliquo di f, per $x \to +\infty$.

(3) Usando i risultati dell'esercizio (2), si ha $\lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{2x^3+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\log\left(\frac{2x}{3}(1+o(1))\right) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \to +\infty$.

Inoltre, $m := \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log\left(\frac{2x^3+3x^{3/2}+3}{3(x+5)^2+\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log\left(\frac{2x}{3}(1+o(1))\right) = 0$, per cui f non ha asintoto obliquo, per $x \to +\infty$.

(4) Si ha $\lim_{x\to+\infty}e^{\sqrt{x^2+5x-4}-x} = \lim_{x\to+\infty}\exp\left(\frac{5x-4}{\sqrt{x^2+5x-4}+x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\exp\left(\frac{5x(1+o(1))}{2x(1+o(1))}\right) = e^{5/2}$, per cui $y = e^{5/2}$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to +\infty$.

(5) Si ha $\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2x = \lim_{x\to+\infty} 2x + 1 + o(1) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \to +\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1+o(1)}{x} = 2$, e $q := \lim_{x\to+\infty} \left(e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2x - 2x\right) = \lim_{x\to+\infty} 1 + o(1) = 1$, per cui $y = 2x+1$ è asintoto obliquo di f, per $x \to +\infty$.

(6) Si ha $\lim_{x\to+\infty} \log(2e^{x+1} + 3x^{10}) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(2e^{x+1}(1+o(1))\right) = \lim_{x\to+\infty} x + 1 + \log 2 + o(1) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \to +\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \log(2e^{x+1} + 3x^{10}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1+\log 2+o(1)}{x} = 1$, e $q := \lim_{x\to+\infty} \left(\log(2e^{x+1} + 3x^{10}) - x\right) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \log 2 + o(1) = 1 + \log 2$, per cui $y = x + 1 + \log 2$ è asintoto obliquo di f, per $x \to +\infty$.

(7) Si ha $\lim_{x\to-\infty} \log(x^{12}e^x + |x|) = \lim_{x\to-\infty} \log\left(|x|(1+o(1))\right) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \log(x^{12}e^x + |x|) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\log|x| + o(1)}{x} = 0$, per cui f non ha asintoto obliquo, per $x \to -\infty$.

(8) Si ha $\lim_{x\to-\infty} \log(x^{12}e^x + 3e^{-x}) = \lim_{x\to-\infty} \log\left(3e^{-x}(1+o(1))\right) = \lim_{x\to-\infty} -x + \log 3 + o(1) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \log(x^{12}e^x + 3e^{-x}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+\log 3+o(1)}{x} = -1$, e $q := \lim_{x\to-\infty} \left(\log(x^{12}e^x + 3e^{-x}) + x\right) = \lim_{x\to-\infty} \log 3 + o(1) = \log 3$, per cui $y = -x + \log 3$ è asintoto obliquo di f, per $x \to -\infty$.

(9) Si ha $\lim_{x\to-\infty} \log(x^{12}e^{-x} + 1) = \lim_{x\to-\infty} \log\left(x^{12}e^{-x}(1+o(1))\right) = \lim_{x\to-\infty} -x + 12\log|x| + o(1) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \log(x^{12}e^{-x} + 1) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+12\log|x|+o(1)}{x} = -1$, e $q := \lim_{x\to-\infty} \left(\log(x^{12}e^{-x} + 1) + x\right) = \lim_{x\to-\infty} 12\log|x| + o(1) = +\infty$, per cui f non ha asintoto obliquo, per $x \to -\infty$.

(10) Si ha $\lim_{x\to-\infty} \left(e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2|x|\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(1 + o(1) - 2x\right) = +\infty$, per cui f non ha asintoto orizzontale, per $x \to -\infty$. Inoltre, $m := \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\left(e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2|x|\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x+1+o(1)}{x} = -2$, e $q := \lim_{x\to-\infty} \left(e^{\frac{1}{3x^2+7}} + 2|x| + 2x\right) = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{3x^2+7}} = 1$, per cui $y = -2x+1$ è asintoto obliquo di f, per $x \to -\infty$.

$\square$

Svolgimento esercizio 5

(1) Si ha $f(x) = \dfrac{\log x - 3\log x(1+o(1))}{\log x(1+o(1))} \dfrac{\sqrt{x}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}} = -2(1+o(1))\cdot 2x\sqrt{x}(1+o(1)) = -4x^{3/2}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito $\frac{3}{2}$.

(2) Si ha $f(x) = \dfrac{3x^2 \cdot \frac{1}{x}(1+o(1)) + x^3 \cdot \frac{1}{x}(1+o(1))}{\frac{\pi}{2}(1+o(1))\,\frac{3x}{\sqrt{x^4+3x}+x^2}} = \dfrac{x^2(1+o(1))}{\frac{\pi}{2}(1+o(1))\,\frac{3x}{2x^2(1+o(1))}} = \dfrac{4}{3\pi}x^3(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 3.

(3) Si ha $f(x) = x^4(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 4.

(4) Si ha $f(x) = \log\left(\dfrac{x^3(1+o(1))}{x^2(1+o(1))}\right) + 3x^6 = \log\big(x(1+o(1))\big) + 3x^6 = 3x^6(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 6.

(5) Si ha $f(x) = \dfrac{1}{2x^2}(1+o(1)) \cdot x^3(1+o(1)) = \dfrac{1}{2}x(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(6) Si ha $f(x) = \log\big(e^{2x}(1+o(1))\big) = 2x(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(7) Si ha $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}\log 3} - 1}{\frac{1}{x^4}(1+o(1))} = x^4 \cdot \dfrac{1}{x}\log 3(1+o(1)) = \log 3 \cdot x^3(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 3.

(8) Si ha $f(x) = \dfrac{\log\big(x^4(1+o(1))\big)}{e^{\frac{1}{x}\log x} - 1} = \dfrac{4\log x(1+o(1))}{\frac{1}{x}\log x(1+o(1))} = 4x(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(9) Introdotta la variabile $z = x-1 \to 0$, si ha $f(x) = f(1+z) = \dfrac{1+z}{|z|} = \dfrac{1+o(1)}{|z|(1+o(1))} = \dfrac{1}{|z|}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(10) Introdotta la variabile $z = x-1 \to 0$, si ha $f(x) = f(1+z) = \dfrac{1+z}{|z^2+2z|} = \dfrac{1+o(1)}{2|z|(1+o(1))} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{|z|}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(11) Introdotta la variabile $z = x-1 \to 0^+$, si ha $f(x) = f(1+z) = \dfrac{1+z}{\sqrt{z^2+2z}} = \dfrac{1+o(1)}{\sqrt{2z}(1+o(1))} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{z}}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito $\frac{1}{2}$.

(12) Si ha $f(x) = \dfrac{x(1+o(1)) \cdot \log 9(1+o(1))}{1+x^3+o(x^3)-1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)} = \dfrac{\log 9 \cdot x(1+o(1))}{\frac{1}{2}x^2(1+o(1))} = 2\log 9\dfrac{1}{x}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(13) Si ha $f(x) = \exp\big(\log x \cdot \log \operatorname{tg} x\big) = \exp\big((\log x)^2(1+o(1))\big)$, per cui f non ha ordine di infinito.

(14) Si ha $f(x) = \dfrac{\arcsin\big(x\log x(1+o(1))\big)}{-\log x(1+o(1)) \cdot x^2(1+o(1))} = \dfrac{x\log x(1+o(1))}{-x^2\log x(1+o(1))} = -\dfrac{1}{x}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(15) Si ha $f(x) = \dfrac{1+x^2+o(x^2)-1-x+o(x)}{\frac{1}{2}x^2(1+o(1))} = \dfrac{-x(1+o(1))}{\frac{1}{2}x^2(1+o(1))} = -\dfrac{2}{x}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(16) Si ha $f(x) = \dfrac{1+x+o(x)-1+x+o(x)}{x^2} = \dfrac{2x(1+o(1))}{x^2} = \dfrac{2}{x}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinito 1.

(17) Si ha $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x^2}\log(1+x)\right) = \exp\left(\dfrac{1}{x^2}x(1+o(1))\right) = e^{1/x(1+o(1))}$, per cui f non ha ordine di infinito.

(18) Si ha $f(x) = \exp\left(e^{2x}\log\dfrac{2(1+o(1))}{x(1+o(1))}\right) = \exp\left(e^{2x}\log\dfrac{2}{x}(1+o(1))\right) = e^{-e^{2x}\log x(1+o(1))} \to +\infty$, ma f non ha ordine di infinito.

(19) Si ha $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x^5}x^4 \sin\frac{1}{x}(1+o(1)) + \frac{2}{x^2}\log x}{x(1+o(1)) + x^2(1+o(1))} = \dfrac{\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}(1+o(1)) + \frac{2}{x^2}\log x}{x(1+o(1))} = \dfrac{\frac{2}{x^2}\log x(1+o(1))}{x(1+o(1))} = \dfrac{2}{x^3}\log x(1+o(1))$, per cui f non ha ordine di infinito.

$\square$

Svolgimento esercizio 6

(1) Si ha $f(x) = \dfrac{x^2(1+o(1))}{x} = x(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

(2) Si ha $f(x) = \dfrac{x}{1+o(1))} = x(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

(3) Si ha $f(x) = \dfrac{x}{1+o(1))}\, x(1+o(1)) = x^2(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 2.

(4) Si ha $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^2(1+o(1))}{x} = \dfrac{1}{2}x(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

(5) Si ha $f(x) = \dfrac{x(1+o(1))}{3\sqrt{x}} = \dfrac{1}{3}\sqrt{x}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo $\frac{1}{2}$.

(6) Si ha $f(x) = |x|$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

(7) Si ha $f(x) = \dfrac{x^3(1+o(1))}{x} = x^2(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 2.

(8) Si ha $f(x) = \dfrac{x^2(1+o(1))}{x(1+o(1))} = x(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

(9) Si ha $f(x) = \dfrac{x^2 + x(1+o(1))}{x\log x + x^2(1+o(1))} = \dfrac{x(1+o(1))}{x\log x(1+o(1))} = \dfrac{1}{\log x}(1+o(1))$, per cui f non ha ordine di infinitesimo.

(10) Si ha $f(x) = \dfrac{1 + x + o(x) - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{\sqrt{x}(1+o(1)) + x(1+o(1))} = \dfrac{x(1+o(1))}{\sqrt{x}(1+o(1))} = \sqrt{x}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo $\frac{1}{2}$.

(11) Si ha $f(x) = 1 - \exp\left(\dfrac{1}{|\log x|}\log|\log x|\right) = \dfrac{\log|\log x|}{|\log x|}(1+o(1))$, per cui f non ha ordine di infinitesimo.

(12) Introdotta la variabile $z = x - 1 \to 0$, si ha $f(x) = f(1+z) = z\log(1+z) = z^2(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 2.

(13) Introdotta la variabile $z = x - 2 \to 0^+$, si ha $f(x) = f(2+z) = \dfrac{\sin\sqrt{z} + z^2}{\sqrt[4]{z} + 1 - \cos(2\pi + \pi z)} = \dfrac{\sqrt{z}(1+o(1)) + z^2}{\sqrt[4]{z} + \frac{1}{2}\pi^2 z^2 + o(z^2)} = \dfrac{\sqrt{z}(1+o(1))}{\sqrt[4]{z}(1+o(1))} = \sqrt[4]{z}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo $\frac{1}{4}$.

(14) Introdotta la variabile $z = x - \frac{\pi}{2} \to 0$, si ha $f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{2} + z\right) = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2} + z) - 1}{2z} = \dfrac{\cos z - 1}{2z} = \dfrac{-\frac{1}{2}z^2(1+o(1))}{2z} = -\dfrac{1}{4}z(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

(15) Si ha $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} \cdot \dfrac{1}{x}(1+o(1)) = \dfrac{2}{2\sqrt{x}(1+o(1))} \cdot \dfrac{1}{x}(1+o(1)) = \dfrac{1}{x^{3/2}}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo $\frac{3}{2}$.

(16) Si ha $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+o(1))}{x^4(1+o(1))} = \dfrac{1}{x^5}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 5.

(17) Si ha $f(x) = \cos\left(\dfrac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}\right) - 1 = \cos\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{x}}(1+o(1))\right) - 1 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4x}(1+o(1)) = -\dfrac{1}{8x}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

(18) Si ha $f(x) = \dfrac{5x^2(1+o(1))}{x^3(1+o(1))} \cdot \dfrac{1-e^{1+o(1)}}{\frac{\pi}{2}(1+o(1))} = \dfrac{10(1-e)}{\pi x}(1+o(1))$, per cui f ha ordine di infinitesimo 1.

□

Svolgimento esercizio 7

(1) Si ha $\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+\sqrt{n}}\right) = \sin\left(2\pi n\sqrt{1+n^{-3/2}}\right) = \sin\left(2\pi n\left(1+\dfrac{1}{2n^{3/2}}(1+o(1))\right)\right) \overset{(a)}{=} \sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}(1+o(1))\right) \to 0$, dove in (a) si è usata la periodicità della funzione seno.

(2) Si ha $n\sin\left(\dfrac{n^2(n-1)-3}{n}\pi\right) = n\sin\left(-\dfrac{3\pi}{n}+n(n-1)\pi\right) \overset{(a)}{=} n\sin\left(-\dfrac{3\pi}{n}\right) = n\left(-\dfrac{3\pi}{n}\right)(1+o(1)) \to -3\pi$, dove in (a) si è usata la periodicità della funzione seno.

(3) Si ha $(2^n-n!)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}(n!)\right) \overset{(a)}{=} -n!(1+o(1))\sin\left(\pi-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n!}\right) = -n!(1+o(1))\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n!}\right) = -n!\left(\dfrac{1}{n!}\right)(1+o(1)) \to -1$, dove in (a) si è usata la relazione $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$, $\forall x > 0$.

(4) Si ha $(3^n-n!)\cos\left(\pi+\operatorname{arctg}(n!)\right) \overset{(a)}{=} -n!(1+o(1))\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n!}\right) = n!(1+o(1))\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n!}\right) = n!\left(\dfrac{1}{n!}\right)(1+o(1)) \to 1$, dove in (a) si è usata la relazione $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$, $\forall x > 0$.

(5) Si ha $\dfrac{n^{n+1}+2\cdot n!}{(n-1)^n+2n^n}\operatorname{tg}\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \dfrac{n^{n+1}(1+o(1))}{(n-1)^n+2n^n}\,\dfrac{2\pi}{n}(1+o(1)) = \dfrac{n(1+o(1))}{(\frac{n-1}{n})^n+2}\,\dfrac{2\pi}{n}(1+o(1)) =$
$= \dfrac{2\pi(1+o(1))}{e^{-1}(1+o(1))+2} \to \dfrac{2\pi}{e^{-1}+2} = \dfrac{2\pi e}{1+2e}$.

(6) Si ha $\dfrac{e^{n+\log n}+n\sin(n!)}{e^{n+1}+n^2}\operatorname{tg}\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) = \dfrac{n(e^n+\sin(n!))}{e^{n+1}(1+o(1))}\,\dfrac{2\pi}{n}(1+o(1)) = \dfrac{ne^n(1+o(1))}{e^{n+1}(1+o(1))}\,\dfrac{2\pi}{n}(1+o(1)) = \dfrac{2\pi}{e}(1+o(1)) \to \dfrac{2\pi}{e}$.

(7) Si ha $\cos n \cdot \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{\cos n}{n}(1+o(1)) \to 0$.

(8) Si ha $\dfrac{\log(1+e^n)}{n} = \dfrac{\log(e^n)(1+o(1))}{n} = \dfrac{n(1+o(1))}{n} \to 1$.

(9) Si ha $\log\left(1+\dfrac{\pi^n}{n!}\right) = \dfrac{\pi^n}{n!}(1+o(1)) \to 0$.

(10) Si ha $\dfrac{\log(3^n+\pi^n)}{2n} = \dfrac{\log(\pi^n(1+o(1)))}{2n} = \dfrac{n\log\pi(1+o(1))}{2n} \to \dfrac{\log\pi}{2}$.

(11) Si ha $\dfrac{\log(4^n+\pi^n)}{2n+\log n} = \dfrac{\log(4^n(1+o(1)))}{2n(1+o(1))} = \dfrac{2n\log 2(1+o(1))}{2n(1+o(1))} \to \log 2$.

(12) Si ha $\dfrac{(3+n!+\pi^{3n})(n+\sqrt{n})}{(2\cdot n!+3)\log(1+n^n)} = \dfrac{n!(1+o(1))\cdot n(1+o(1))}{2\cdot n!(1+o(1))\cdot n\log n(1+o(1))} = \dfrac{1}{2\log n}(1+o(1)) \to 0$.

(13) Si ha $\log(n+\sqrt{n^2+1}) - \log n = \log\Big(\dfrac{n\sqrt{n^2+1}}{n}\Big) = \log\Big(\dfrac{2n(1+o(1))}{n}\Big) \to \log 2$.

(14) Si ha $\log(n-\sqrt{n^2-1})+\log n = \log\Big(\dfrac{1}{n+\sqrt{n^2-1}}\Big)+\log n = \log\Big(\dfrac{n}{n+\sqrt{n^2-1}}\Big) = \log\Big(\dfrac{n}{2n(1+o(1))}\Big) \to -\log 2$.

(15) Si ha $\dfrac{\log(n^2+1)-\log n}{\log(2n)}\big(n^2+n^{3/2}\log n-2\sqrt{n}\big) = \dfrac{\log\frac{n^2+1}{n}}{\log n+\log 2}\,n^2(1+o(1)) = \dfrac{\log n(1+o(1))}{\log n(1+o(1))}\,n^2(1+o(1)) = n^2(1+o(1)) \to +\infty$.

(16) Si ha $\dfrac{\log((n+6)!)-\log(n!+n^7)}{\log(6n^8+\sin\frac{n\pi}{2})} = \dfrac{\log\frac{(n+6)!}{n!+n^7}}{8\log n(1+o(1))} = \dfrac{\log(n^6(1+o(1)))}{8\log n(1+o(1))} \to \dfrac{3}{4}$.

(17) Si ha $2^{n+1}-2^{\sqrt{n^2-1}} = 2^{\sqrt{n^2-1}}\big(2^{n+1-\sqrt{n^2-1}}-1\big)$. Poiché $n+1-\sqrt{n^2-1} = \frac{(n+1)^2-n^2+1}{n+1+\sqrt{n^2-1}} = \frac{2n+2}{n+1+\sqrt{n^2-1}} = \frac{2n(1+o(1))}{2n(1+o(1))} = 1+o(1)$, si ha $2^{n+1}-2^{\sqrt{n^2-1}} = 2^{\sqrt{n^2-1}}(2^{1+o(1)}-1) = 2^{n(1+o(1))}(1+o(1)) \to +\infty$.

(18) Si ha $\sqrt[n]{n^3} = e^{\frac{1}{n}\log n^3} \to 1$.

(19) Si ha $\sqrt[2n+1]{-n} = -\sqrt[2n+1]{n} = -e^{\frac{1}{2n+1}\log n} \to -1$.

(20) Si ha $\sqrt[n]{n^2+3} = e^{\frac{1}{n}\log(n^2+3)} \to 1$.

(21) Si ha $\sqrt[n]{2^n+n^2} = e^{\frac{1}{n}\log(2^n+n^2)} = e^{\log 2(1+o(1))} \to 2$.

(22) Intanto $\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}(1+o(1))} \to \frac{1}{2}$. Inoltre, $\sqrt[n]{2^{n+1}+n^2} = e^{\frac{1}{n}\log(2^{n+1}+n^2)} = e^{\log 2(1+o(1))} \to 2$. Quindi $\big(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\big)\sqrt[n]{2^{n+1}+n^2} \to 1$.

(23) Si ha $\Big(\dfrac{2n+1}{3n+4}\Big)^{n/3} = \exp\Big(\dfrac{n}{3}\log\Big(\dfrac{2n+1}{3n+4}\Big)\Big) = \exp\Big(\dfrac{n}{3}\log\Big(\dfrac{2}{3}(1+o(1))\Big)\Big) = \exp\Big(-\dfrac{n}{3}\log\dfrac{3}{2}(1+o(1))\Big) \to 0$.

(24) Si ha $\Big(\dfrac{2n+1}{3n+4}\Big)^{3/n} = \exp\Big(\dfrac{3}{n}\log\Big(\dfrac{2n+1}{3n+4}\Big)\Big) = \exp\Big(\dfrac{3}{n}\log\Big(\dfrac{2}{3}(1+o(1))\Big)\Big) = \exp\Big(-\dfrac{3}{n}\log\dfrac{3}{2}(1+o(1))\Big) \to 1$.

(25) Si ha $\Big(\dfrac{3n+4}{2n+1}\Big)^{n} = \exp\Big(n\log\Big(\dfrac{3n+4}{2n+1}\Big)\Big) = \exp\Big(n\log\Big(\dfrac{3}{2}(1+o(1))\Big)\Big) = \exp\Big(n\log\dfrac{3}{2}(1+o(1))\Big) \to +\infty$.

(26) Si ha $(\sqrt[n]{2}-1)^n = \exp\big(n\log(\sqrt[n]{2}-1)\big) = \exp\big(n\log o(1)\big) \to 0$. Oppure, poiché $0 < \sqrt[n]{2}-1 < \frac{1}{2}$, definitivamente, si ha, definitivamente, $0 < (\sqrt[n]{2}-1)^n < 2^{-n} \to 0$.

(27) Si ha $\Big(1+\dfrac{1}{n!}\Big)^{n^n} = \exp\Big(n^n\log\Big(1+\dfrac{1}{n!}\Big)\Big) = \exp\Big(n^n\cdot\dfrac{1}{n!}(1+o(1))\Big) \to +\infty$.

(28) Si ha $\Big(1+\dfrac{1}{n^n}\Big)^{n!} = \exp\Big(n!\log\Big(1+\dfrac{1}{n^n}\Big)\Big) = \exp\Big(n!\cdot\dfrac{1}{n^n}(1+o(1))\Big) \to 1.$

(29) Poiché $n^n = o((2n+1)^n)$, e $n^n = o((2n+2)^n)$ [in quanto, ad esempio $\frac{n^n}{(2n+1)^n} = \exp\Big(n \cdot \log\frac{n}{2n+1}\Big) = \exp\Big(n\log\Big(\frac{1}{2}(1+o(1))\Big)\Big) = \exp\Big(-n\log 2(1+o(1))\Big) \to 0$], si ha $\dfrac{(2n+1)^n+n^n}{(2n+2)^n-n^n} = \dfrac{(2n+1)^n(1+o(1))}{(2n+2)^n(1+o(1))} = \exp\Big(n\cdot\log\dfrac{2n+1}{2n+2}\Big)(1+o(1)) = \exp\Big(n\log\Big(1-\dfrac{1}{2n+2}\Big)\Big)(1+o(1)) = \exp\Big(-\dfrac{n}{2n+2}(1+o(1))\Big)(1+o(1)) \to e^{-1/2}.$

(30) Si ha $n^2(2n+\sqrt{n})^{1/n} - \cos(n^3) = n^2\sqrt[n]{2n}\Big(1+\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\Big)^{1/n} - \cos(n^3) = n^2(1+o(1)) - \cos(n^3) = n^2(1+o(1)) \to +\infty$, poiché $(1+\frac{1}{2\sqrt{n}})^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{2\sqrt{n}})} \to 1.$

(31) Si ha $\big(4n^n-(n+1)^n\big)^{1/n} = n\Big\{4-\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^n\Big\}^{1/n} = n(4-e+o(1))^{1/n} = n(1+o(1)) \to +\infty$, poiché $1 \le (4-e+o(1))^{1/n} \le 4^{1/n} \to 1.$

(32) Si ha $\big((n+1)^{n+1}-n^{n+1}\big)^{1/n} = n\sqrt[n]{n}\Big\{\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^{n+1}-1\Big\}^{1/n} = n(1+o(1))(e+o(1)-1)^{1/n} = n(1+o(1)) \to +\infty$, poiché $1 \le (e-1+o(1))^{1/n} \le e^{1/n} \to 1.$

(33) Si ha $\dfrac{(n^2-1)^n\,\sin(\frac{\pi n+1}{4n-1})}{(n-2)^{2n}+\mathrm{arctg}(n!-2^n)} = \dfrac{n^{2n}\exp\big(n\log(1-\frac{1}{n^2})\big)\,\sin\big(\frac{\pi}{4}(1+o(1))\big)}{n^{2n}\exp\big(2n\log(1-\frac{2}{n})\big)+\frac{\pi}{2}(1+o(1))} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\exp\Big(n\Big(-\dfrac{1}{n^2}\Big)(1+o(1)) - 2n\Big(-\dfrac{2}{n}\Big)(1+o(1))\Big)(1+o(1)) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^4(1+o(1)) \to \dfrac{e^4\sqrt{2}}{2}.$

(34) Si ha $\dfrac{(3n^{2n^2}-(n^2+1)^{n^2})^2+4n^{n^2}}{(n^2+5)^{2n^2}+6(n^2)^{n^2+n}} = \dfrac{n^{4n^2}\big(3-(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}\big)^2+4n^{n^2}}{n^{4n^2}\big(1+\frac{5}{n^2}\big)^{2n^2}+6n^{2n^2+n}} = \dfrac{(3-e+o(1))^2+4n^{-3n^2}}{\exp\big(2n^2\log(1+\frac{5}{n^2})\big)+6n^{-2n^2+n}} = \dfrac{(3-e)^2+o(1)}{\exp\big(2n^2\frac{5}{n^2}(1+o(1))\big)+6n^{-2n^2+n}} \to \dfrac{(3-e)^2}{e^{10}}.$

(35) Si ha $\dfrac{((n+1)!)^{2n}((7\cdot n!)^{3/n!}-1)}{n^{2n}\log((n!)^6)((n!)^{2n-1}+n^2)} = \dfrac{(n+1)^{2n}(n!)^{2n}\{\exp(\frac{3}{n!}\log(7\cdot n!))-1\}}{6n^{2n}\log(n!)\cdot(n!)^{2n-1}(1+o(1))} =$
$= \Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^{2n}\dfrac{(n!)^{2n}\{\frac{3}{n!}\log(7\cdot n!)(1+o(1))\}}{6\log(n!)\cdot(n!)^{2n-1}(1+o(1))} = e^2(1+o(1))\dfrac{3\log(n!)(1+o(1))\}}{6\log(n!)(1+o(1))} \to \dfrac{e^2}{2}.$

(36) Si ha $\dfrac{\log((n!)^2)((n!)^{3n-1}+n^3)}{(n!)^{3n}((8\cdot n!)^{2/n!}-1)} = \dfrac{2\log(n!)\cdot(n!)^{3n-1}(1+o(1))}{(n!)^{3n}\{\exp(\frac{2}{n!}\log(8\cdot n!))-1\}} = \dfrac{2\log(n!)\cdot(n!)^{3n-1}(1+o(1))}{(n!)^{3n}\{\frac{2}{n!}\log(8\cdot n!)(1+o(1))\}} = \dfrac{2\log(n!)(1+o(1))\}}{2\log(n!)(1+o(1))} \to 1.$

(37) Si ha $\dfrac{n^{3n}\log((n!)^2)(n!)^{3n-1}}{(((n+1)!)^{3n}+n^3)((8\cdot n!)^{2/n!}-1)} = \dfrac{2n^{3n}\log(n!)\cdot(n!)^{3n-1}}{(n+1)^{3n}(n!)^{3n}(1+o(1))\{\exp(\frac{2}{n!}\log(8\cdot n!))-1\}} =$
$= \Big(\dfrac{n}{n+1}\Big)^{3n}\dfrac{2\log(n!)\cdot(n!)^{3n-1}(1+o(1))}{(n!)^{3n}\{\frac{2}{n!}\log(8\cdot n!)(1+o(1))\}} = e^{-3}(1+o(1))\dfrac{2\log(n!)(1+o(1))}{2\log(n!)(1+o(1))} \to \dfrac{1}{e^3}.$

(39) Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, si ha $1 \le (n-1)! \le n! \le n^n$, per cui $1 \le ((n-1)!)^{1/n^3} \le n^{1/n^2} = \exp(\frac{\log n}{n^2}) \to 1$, cioè $((n-1)!)^{1/n^3} \to 1$. **Alternativamente**, per la formula di Stirling si ha $((n-$

$1)!)^{1/n^3} = \exp\Big(\dfrac{\log((n-1)!)}{n^3}\Big) = \exp\Big(\dfrac{\log((n-1)^{n-1}e^{1-n}\sqrt{2\pi(n-1)}(1+o(1)))}{n^3}\Big) = \exp\Big\{\dfrac{1}{n^3}\Big((n-$
$1)\log(n-1) - n + 1 + \dfrac{1}{2}\log(n-1) + \dfrac{1}{2}\log(2\pi) + \log(1+o(1))\Big)\Big\} = \exp\Big(\dfrac{n\log n(1+o(1))}{n^3}\Big) \to 1.$

(40) Si ha $\dfrac{((n+1)!)^{1/n^3} - ((n-1)!)^{1/n^3}}{\log(n^4+n)\,\mathrm{tg}(\frac{1}{2n^3})} = \dfrac{((n-1)!)^{1/n^3}((n^2+n)^{1/n^3}-1)}{4\log(n)\cdot\frac{1}{2n^3}(1+o(1))} =$
$= \dfrac{n^3(1+o(1))}{2\log n}\Big\{\exp\Big(\dfrac{\log(n^2+n)}{n^3}\Big) - 1\Big\} = \dfrac{n^3(1+o(1))}{2\log n}\,\dfrac{2\log n(1+o(1))}{n^3} \to 1.$

(38) Per la formula di Stirling si ha $\dfrac{\log(n!)}{n\log n} = \dfrac{\log\left(n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+o(1))\right)}{n\log n} = \dfrac{n\log n - n + \frac{1}{2}\log(2\pi n) + o(1)}{n\log n} =$
$\dfrac{n\log n(1+o(1))}{n\log n} \to 1.$

□

Analisi Matematica I
Calcolo differenziale e applicazioni

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti funzioni sono derivabili in $x_0 = 0$.

(1) $f(x) = x|x|$

(2) $f(x) = |x| \sin x$

(3) $f(x) = |x \sin x|$

(4) $f(x) = x \sin \sqrt[3]{x}$

(5) $f(x) = (e^x - 1) \sin \sqrt[3]{x}$

(6) $f(x) = |e^x - 1| \sin \sqrt[3]{x}$

(7) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\log(1+|x|)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(8) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\log(1+x^2)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(9) $f(x) = |\log(1+x)|^{1/2} |x|^{3/4}$

(10) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(11) $f(x) = x\sqrt{|x|}$

(12) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(13) $f(x) = \sqrt{|\sin^3 x|}$

(14) $f(x) = |x| \cos x$

(15) $f(x) = \sqrt{|x|}$

(16) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 |x|}{\sqrt[3]{x^4}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(17) $f(x) = \begin{cases} \frac{|1-e^x|}{\sqrt[5]{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(18) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|1-e^x|}}{\sqrt[5]{|x|}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(19) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Esercizio 2. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto x_0.

(1) $f(x) = x^{1/x}, \qquad x_0 = 1$

(2) $f(x) = \log\log x, \qquad x_0 = e$

(3) $f(x) = \dfrac{\log x}{1+\log x}, \qquad x_0 = e$

(4) $f(x) = \sin(e^{2x^2+1}), \qquad x_0 = 1$

(5) $f(x) = \arcsin(\log x + 1), \qquad x_0 = \dfrac{1}{e}$

(6) $f(x) = \log\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \arcsin x\right)\right), \qquad x_0 = \dfrac{1}{2}$

(7) $f(x) = \text{arsinh}(1 + \sinh x), \qquad x_0 = 0$

Esercizio 3. Determinare estremo superiore/inferiore di f nell'insieme A indicato.

(1) $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 1, \qquad A = [-2, 3]$

(2) $f(x) = |x|^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 1, \qquad A = [-2, 3]$

(3) $f(x) = \sqrt[3]{|x|}, \qquad A = [-1, 2]$

(4) $f(x) = x|x|, \qquad A = [-2, 1]$

(5) $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}, \qquad A = [-2, 3]$

(6) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3|x+1| + 1}{x^2 + 4}, \qquad A = [-2, 2]$

Esercizio 4. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza/decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

(1) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{2x^2 - 1}$

(3) $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x^2 + 1}$

(4) $f(x) = x^2 - 3x^{2/3}$

(5) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x + 1}$

(6) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$

(7) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4}{|3 - x^2|} - 2}$

(8) $f(x) = x^2 \left(\log(\dfrac{x}{4}) - 1\right)^2$

(9) $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{x+2}$

(10) $f(x) = (x^2+12x)e^{-2/x}$

(11) $f(x) = xe^{\frac{x}{1+x}}$

(12) $f(x) = |x|e^{\frac{x}{1+x}}$

(13) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

(14) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{x^2-x}\right)$

(15) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\log\left(\dfrac{x}{(x+3)|x+4|}\right)\right)$

(16) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x\exp\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)\right)$

(17) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$

(18) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

(19) $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$

(20) $f(x) = \sqrt{\cos\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)}$

Esercizio 5. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza/decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità. Determinare eventuali punti di flesso, e intervalli di concavità/convessità.

(1) $f(x) = \dfrac{x^2+2|x|+1}{x+1}$

(2) $f(x) = \dfrac{4|x^2+x|-1}{x^2}$

(3) $f(x) = \dfrac{|x^2-1|-1}{(x-1)^2}$

(4) $f(x) = x - \log(x^2+x+1)$

(5) $f(x) = |x| - \log(x^2+x+1)$

(6) $f(x) = (x^2+x)e^{x+1}$

(7) $f(x) = (x^2+x)e^{-(x+1)}$

(8) $f(x) = e^{\frac{x}{1+x}}$

(9) $f(x) = e^{\frac{x}{|1+x|}}$

(10) $f(x) = \operatorname{arctg}(1-x^2)$

(11) $f(x) = \operatorname{arctg}(1-x^2) + \operatorname{arctg}\Big(\dfrac{1}{|1-x^2|}\Big)$

Esercizio 6. Determinare se le seguenti funzioni sono iniettive. In caso affermativo, determinare il valore della derivata prima della funzione inversa nel punto (x_0, y_0) specificato.

(1) $f(x) = e^{x^3} + 2e^{\operatorname{arctg}(3x)} - 1, \qquad (0,2)$

(2) $f(x) = \log(x^3 + x^2 + e),\ x > 0, \qquad (1, \log(2+e))$

(3) $f(x) = \sqrt[5]{1 - x - \cos x}, \qquad (0,0)$

(4) $f(x) = e^{2x} - 2x^2, \qquad (0,1)$
(Suggerimento: tracciare il grafico di f'.)

(5) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - e^x + 1, \qquad (0,0)$
(Suggerimento: tracciare il grafico di f'.)

Esercizio 7. Determinare lo sviluppo di Taylor, di ordine n e centro x_0 indicati, delle seguenti funzioni.

(1) $f(x) = \cos x - e^{-x^2/2},\ n = 6,\ x_0 = 0$

(2) $f(x) = \log\left(\dfrac{2x+1}{3}\right) - \log\left(\dfrac{x+2}{3}\right),\ n = 4,\ x_0 = 1$

(3) $f(x) = \cos x \log(1 + x^2),\ n = 6,\ x_0 = 0$

(4) $f(x) = \log(1 + x) \operatorname{arctg} x - x \sin x,\ n = 5,\ x_0 = 0$

(5) $f(x) = \big(e^{-x^2} - \cos(x\sqrt{2})\big)^2,\ n = 8,\ x_0 = 0$

(6) $f(x) = x^2(\log(1 + x))^2 - \cos(2x),\ n = 6,\ x_0 = 0$

(7) $f(x) = \sin(x^2 + x^3),\ n = 8,\ x_0 = 0$

(8) $f(x) = 2\log(\cos x) + \sin x^2,\ n = 4,\ x_0 = 0$

(9) $f(x) = (\arcsin x)^2 + 2\log(1 - \sin^2 x),\ n = 4,\ x_0 = 0$

(10) $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right) - \log\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right),\ n = 4,\ x_0 = 1$

(11) $f(x) = \sqrt[4]{1 - \sin(x^2)} - \cos(2x),\ n = 6,\ x_0 = 0$

(12) $f(x) = x^{x-1},\ n = 4,\ x_0 = 1$

(13) $f(x) = 3\cos\big(\sin(2x) - 2\log(1 + x)\big),\ n = 6,\ x_0 = 0$

(14) $f(x) = \exp\big(x^2 \log(1 + x + x^2)\big) + x \sin x,\ n = 5,\ x_0 = 0$

(15) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x \sin x},\ n = 6,\ x_0 = 0$

(16) $f(x) = \dfrac{1}{\cosh x},\ n = 6,\ x_0 = 0$

(17) $f(x) = \cosh(x - x^2) - \log(1 - x^2),\ n = 5,\ x_0 = 0$

(18) $f(x) = \log(1 + x \sinh x),\ n = 6,\ x_0 = 0$

Esercizio 8. Calcolare i seguenti limiti.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2} - \cos(\sqrt{2}x)}{x^3 \sin x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(\sqrt{2}x^2) - e^{-x^4}}{x^5(\arcsin x)^3}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - \sin^2 x}{x^3(e^x - \cos x)}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(\arcsin x - x)}{\sin^3 x - x^3}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x - \log(1+x^2)}{x^2 - x\arcsin x}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^3) - \sin^3 x}{x^2 \ \mathrm{arctg}(x^3)}$

(7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1 - x\log(1+x)}{\mathrm{tg}^2\, x \ \log(1+x)}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^2) - (\log(1+x))^2 - x^3}{x^2 \ \mathrm{arctg}(x^2)}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(6x) - 6x\, e^{-6x^2}}{x^3(\mathrm{arctg}\, x)^2}$

(10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x) - x}{\sqrt{\cos x} - 1}$

(11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}(\log(1+x^2)) - x^2}{x^4}$

(12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x - \log(\cos x)}{x\sin x}$

(13) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin^2 x - \log(\cos x))\log(1+\sin x)}{\sin^2 x\sin(2x)}$

(14) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{\sin x}}{\mathrm{tg}\, x - x}$

(15) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(3x^2\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - 2x + (x^2+x)\log\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right)$

(16) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^4\left(1 - \cos\dfrac{2}{x} - x\log\left(1+\dfrac{2}{x^3}\right) + \dfrac{3}{x^5}\right)$

(17) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^x - 4e^{\sqrt{x}} + 3e^{\sqrt[3]{x}}}{\log x - x + 1}$

(18) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{(\pi - x)^2 - 8 + 8\sin(x/2)}{4\cos^2(x/2) - (\pi - x)^2}$

(19) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^2) - \sinh(x^2)}{x^2(\mathrm{arctg}\, x)^2}$

(20) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - x\sinh(x) + \frac{2}{3}x^4}{(\operatorname{arctg} x - x)^2}$

(21) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cosh(x)}{(e^{x^2} - \cos x)^2}$

Esercizio 9. Calcolare il limite per $n \to \infty$ delle seguenti successioni.

(1) $a_n = \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(3n^2 \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - 2n + (n^2+n)\log\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right)$

(2) $a_n = n^4\left(1 - \cos\dfrac{2}{n} - n\log\left(1+\dfrac{2}{n^3}\right) + \dfrac{3}{n^5}\right)$

(3) $a_n = n^3 \sqrt[n]{\dfrac{n+1}{n}} - n^3 - n$

(4) $a_n = n^3 \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} - n^3 - \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{8}n$

(5) $a_n = \dfrac{(\operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \frac{1}{n})(\sin\frac{1}{n} + e^{-n})}{e^{-\frac{1}{2n^2}} - \cos\frac{1}{n}}$

(6) $a_n = \dfrac{(1+\frac{2}{n})^{n^2} + n^{\sqrt{n}}}{e^{2n} - 3^{n \operatorname{arctg} n}}$

(7) $a_n = \dfrac{(n+\sqrt{n})^n + (n+2)^n + 3n!}{(n+4)^n(e^{\sqrt{n+1}} + 2^{\sqrt{n}})}$

(8) $a_n = \dfrac{n^{n+1}(n^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1)(\sqrt{n+1}+1)}{(n+\log n)^n(1+\log n)}$

(9) $a_n = \dfrac{3n! + (en)^n + (5\sqrt[3]{n+2})^n}{\left((n+1)(1+\frac{1}{n})^n + 1\right)^n}$

(10) $a_n = \dfrac{(n - \log n + 2)^n (n + \log\log n)^n}{(n^2 + 5\log n)^n - (n^2+2)^n}$

(11) $a_n = \dfrac{(2+n^{1/n})^n(\sqrt[3]{\sqrt{n}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{n}+1}\,)}{(1+2\pi^{1/n})^n + (1+\log n)^{\log n}}$

(12) $a_n = \dfrac{(2+8^{1/n})^n - 2\cdot 3^n}{(3n^{1/n} + \frac{1}{n})^n(\sqrt[n]{n^2+2n} - n^{2/n})}$

(13) $a_n = \dfrac{\left(e^{3/n^2} - \cos(\frac{1}{2n})\right)^{n^2}}{\left(e^{2/n^2} - \cos(\frac{3}{2n})\right)^{n^2}}$

Analisi Matematica I
Calcolo differenziale e applicazioni (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x\to 0} |x| = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(2) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} |x|(1+o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(3) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x\sin x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \sin x = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(4) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sin\sqrt[3]{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}(1+o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(5) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)\sin\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \sin\sqrt[3]{x}(1+o(1)) = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x}(1+o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(6) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|e^x-1|\sin\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}\sin\sqrt[3]{x}(1+o(1)) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}\sqrt[3]{x}(1+o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(7) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x\log(1+|x|)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|(1+o(1))} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}|x|(1+o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(8) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x\log(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(1+o(1))} = 1$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(9) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|\log(1+x)|^{1/2}|x|^{3/4}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{5/4}(1+o(1))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}|x|^{1/4}(1+o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(10) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(11) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt{|x|} = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(12) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x^2} = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(13) Si ha $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|\sin^3 x|}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{3/2}(1+o(1))}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}(1+o(1)) = 0$, e quindi f è derivabile in $x_0 = 0$.

(14) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|}{x}(1+o(1)) = \pm 1$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$, e tale punto è angoloso.

(15) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|}{x}\frac{1}{\sqrt{|x|}} = \pm\infty$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$, e tale punto è di cuspide.

(16) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sin^2|x|}{x\sqrt[3]{x^4}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|^2(1+o(1))}{x^{7/3}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}(1+o(1)) = \pm\infty$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$, e tale punto è di cuspide.

(17) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0} \frac{|1-e^x|}{x\sqrt[5]{x}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|(1+o(1))}{x\sqrt[5]{x}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|}{x}\frac{1}{\sqrt[5]{x}}(1+o(1)) = +\infty$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$, e tale punto è a tangente verticale.

(18) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|1-e^x|}}{x\sqrt[5]{|x|}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{|x|}(1+o(1))}{x\sqrt[5]{|x|}} = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|}{x}\frac{1}{|x|^{7/10}}(1+o(1)) = \pm\infty$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$, e tale punto è di cuspide.

(19) Si ha $f'_\pm(0) = \lim_{x\to 0^\pm} \frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0^\pm} \sin\frac{1}{x} = \nexists$, e quindi f non è derivabile in $x_0 = 0$.

□

Svolgimento esercizio 2

(1) Si ha $f(x) = e^{\frac{1}{x}\log x}$, per cui $f'(x) = e^{\frac{1}{x}\log x}\frac{1-\log x}{x^2}$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$, e quindi la retta tangente è $y = 1 + (x-1) = x$.

(2) Si ha $f'(x) = \frac{1}{x\log x}$, $f(e) = 0$, $f'(e) = \frac{1}{e}$, e quindi la retta tangente è $y = \frac{1}{e}(x-e) = \frac{x}{e} - 1$.

(3) Si ha $f'(x) = \frac{1}{x(1+\log x)^2}$, $f(e) = \frac{1}{2}$, $f'(e) = \frac{1}{4e}$, e quindi la retta tangente è $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4e}(x-e) = \frac{x}{4e} + \frac{1}{4}$.

(4) Si ha $f'(x) = 4xe^{2x^2+1}\cos(e^{2x^2+1})$, $f(1) = \sin(e^3)$, $f'(1) = 4e^3\cos(e^3)$, e quindi la retta tangente è $y = \sin(e^3) + 4e^3\cos(e^3)(x-1)$.

(5) Si ha $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-(\log x+1)^2}}$, $f(\frac{1}{e}) = 0$, $f'(\frac{1}{e}) = e$, e quindi la retta tangente è $y = e(x-\frac{1}{e}) = ex-1$.

(6) Si ha $f'(x) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}+\arcsin x)}{\sin(\frac{\pi}{2}+\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}$, $f(\frac{1}{2}) = \log\frac{\sqrt{3}}{2}$, $f'(\frac{1}{2}) = -\frac{2}{3}$, e quindi la retta tangente è $y = \log\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3}(x-\frac{1}{2}) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} + \log\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(7) Si ha $f'(x) = \frac{\cosh x}{\sqrt{1+(1+\sinh x)^2}}$, $f(0) = \operatorname{arsinh} 1 = \log 2$, $f'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, e quindi la retta tangente è $y = \log 2 + \frac{x}{\sqrt{2}}$.

□

Svolgimento esercizio 3

(1) Si ha $f'(x) = 3(x^2+x-2)$ e $f'(x) = 0 \iff x = -2 \notin A^o \ \vee x = 1 \in A^o$, per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-2, 3, 1\}$. Si ha $f(-2) = 11$, $f(3) = \frac{47}{2} = \max_A f$, $f(1) = -\frac{5}{2} = \min_A f$.

(2) Si ha $f'(x) = \begin{cases} 3(x^2+x-2), & 0 < x < 3, \\ -3(x^2-x+2), & -2 < x < 0, \end{cases}$ e $f'(x) = 0 \iff x = 1 \in A^o$, per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-2, 3, 0, 1\}$. Si ha $f(-2) = 27 = \max_A f$, $f(3) = \frac{47}{2}$, $f(0) = 1$,$f(1) = -\frac{5}{2} = \min_A f$.

(3) Si ha $f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 0 < x < 2, \\ -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & -1 < x < 0, \end{cases}$ per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-1, 2, 0\}$. Si ha $f(-1) = 1$, $f(2) = \sqrt[3]{2} = \max_A f$, $f(0) = 0 = \min_A f$.

(4) Si ha $f'(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0, \\ -2x, & -2 < x < 0, \end{cases}$ per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-2, 1, 0\}$. Si ha $f(-2) = -4 = \min_A f$, $f(1) = 1 = \max_A f$, $f(0) = 0$.

(5) Si ha $f'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}, & 0 < x < 3, \\ \frac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}, & -2 < x < 0, \end{cases}$ e $f'(x) = 0 \iff x = 1+\sqrt{2} \in A^o \ \vee x = -1-\sqrt{2} \notin A^o$, per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\left\{-2, 3, 0, 1+\sqrt{2}\right\}$. Si ha $f(-2) = \frac{6}{5}$, $f(3) = \frac{6}{5}$, $f(0) = 0 = \min_A f$, $f(1+\sqrt{2}) = \frac{1+\sqrt{2}}{2} = \max_A f$.

(6) Si ha $f'(x) = \begin{cases} \frac{3(x^2+4x-4)}{(x^2+4)^2}, & 0 < x < 3, \\ \frac{-6(x^2-2)}{(x^2+4)^2}, & -2 < x < 0, \end{cases}$ e $f'(x) = 0 \iff x = \sqrt{8} - 2 \in A^o \vee x = -\sqrt{2} \in A^o$, per cui i punti di massimo e di minimo si trovano nell'insieme $\{-2, 2, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{8} - 2\}$. Si ha $f(-2) = \frac{1}{4}$, $f(2) = -\frac{1}{2}$, $f(-1) = \frac{2}{5} = \max_A f$, $f(-\sqrt{2}) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(\sqrt{8} - 2) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{2} = \min_A f$. $\square$

Svolgimento esercizio 4

(1) Sia $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \frac{2x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = 2 + o(1)$, per cui $y = 2$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \frac{4x(x^2+1)-2x(2x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{6x}{(x^2+1)^2} \geq 0 \iff x \geq 0$.

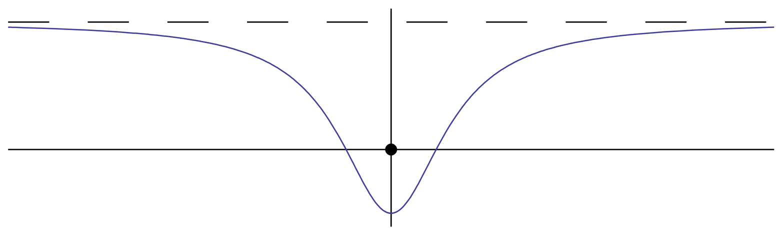


Figura 1: Grafico per l'esercizio 4 (1)

Allora, $x = 0$ è un punto di minimo relativo. Si ha $f(0) = -1$.
Il grafico è riportato in figura 1.

(2) Sia $f(x) = \frac{x^2+2x}{2x^2-1}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \frac{x^2(1+o(1))}{2x^2(1+o(1))} = \frac{1}{2}(1 + o(1))$, per cui $y = \frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$. Per $x \to (-\frac{1}{\sqrt{2}})^\pm$, si ha $f(x) = \frac{\frac{1}{2}-\sqrt{2}+o(1)}{(-2+o(1))(\sqrt{2}x+1)} = \frac{2\sqrt{2}-1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}x+1}(1 + o(1)) \to \pm\infty$. Per $x \to (\frac{1}{\sqrt{2}})^\pm$, si ha $f(x) = \frac{\frac{1}{2}+\sqrt{2}+o(1)}{(2+o(1))(\sqrt{2}x-1)} = \frac{2\sqrt{2}+1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}x-1}(1 + o(1)) \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \frac{(2x+2)(2x^2-1)-4x(x^2+2x)}{(2x^2-1)^2} = \frac{-2(2x^2+x+1)}{(2x^2-1)^2} \leq 0 \iff x \in \operatorname{dom} f$.

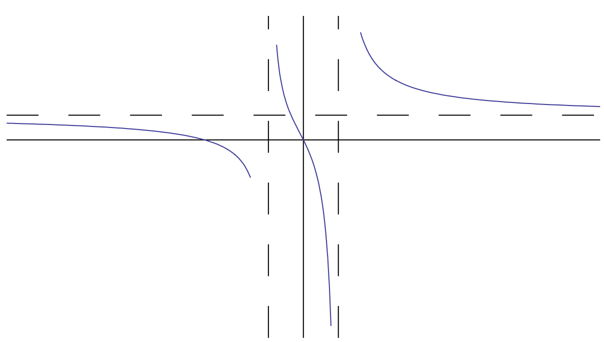


Figura 2: Grafico per l'esercizio 4 (2)

Il grafico è riportato in figura 2.

(3) Sia $f(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2+1}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \frac{x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = 1 + o(1)$, per cui $y = 1$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}, & x > 0, \\ \frac{x^2+2x-1)}{(x^2+1)^2}, & x < 0, \end{cases}$ per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1-\sqrt{2}] \cup (0, 1+\sqrt{2}]$. Si ha poi $f'_{\pm}(0) = \lim_{x \to 0^{\pm}} f'(x) = \pm 1$.

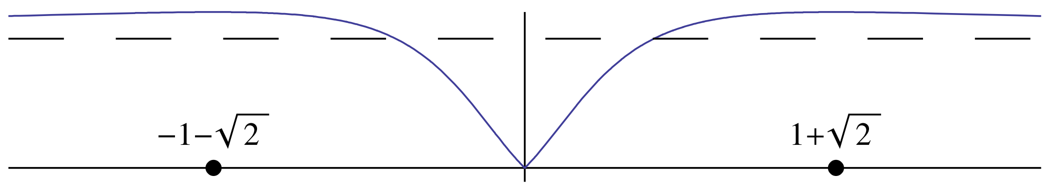


Figura 3: Grafico per l'esercizio 4 (3)

Allora, $x = \pm(1+\sqrt{2})$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = 0$ è un punto di minimo relativo ed è angoloso. Si ha $f(0) = 0$, $f\big(\pm(1+\sqrt{2})\big) = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.
Il grafico è riportato in figura 3.

(4) Sia $f(x) = x^2 - 3x^{2/3}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Si ha, per $x \to \pm\infty$, $f(x) = x^2(1+o(1))$, per cui f non ha né asintoto orizzontale, né asintoto obliquo, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = 2x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2(x^{4/3}-1)}{\sqrt[3]{x}} \geq 0 \iff x \in [-1, 0) \cup [1, +\infty)$. Si ha anche $f'_{\pm}(0) = \lim_{x \to 0^{\pm}} f'(x) = \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{2(x^{4/3}-1)}{\sqrt[3]{x}} = \mp\infty$.

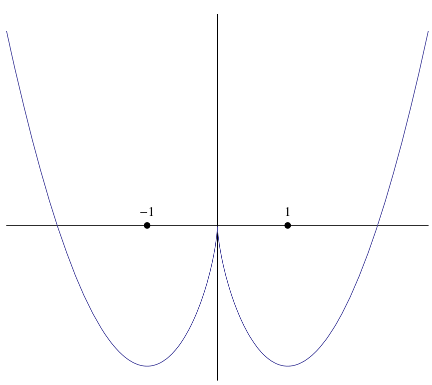


Figura 4: Grafico per l'esercizio 4 (4)

Allora, $x = -1$ e $x = 1$ sono punti di minimo relativo, mentre $x = 0$ è un punto di massimo relativo e di cuspide. Si ha $f(0) = 0$, $f(\pm 1) = -2$.
Il grafico è riportato in figura 4.

(5) Sia $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+1}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+1} = \frac{1}{x^{2/3}(1+o(1))} = o(1)$, per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$. Per $x \to (-1)^{\pm}$, si ha $f(x) = -\frac{1}{x+1}(1+o(1)) \to \mp\infty$, per cui $x = -1$ è asintoto verticale di f.

Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, si ha $f'(x) = \frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}(x+1) - \sqrt[3]{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-2x}{3x^{2/3}(x+1)^2} \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (-1, \frac{1}{2}]$. Si ha poi $f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{3x^{2/3}} 1 + o(1) = +\infty$.

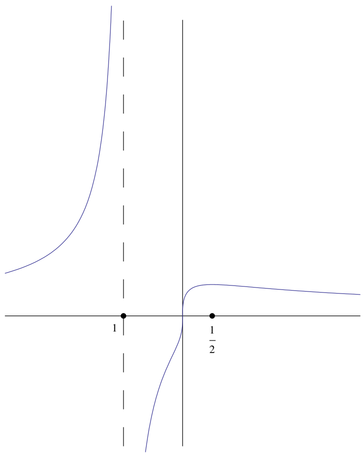


Figura 5: Grafico per l'esercizio 4 (5)

Allora, $x = \frac{1}{2}$ è un punto di massimo relativo. Si ha $f(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.
Il grafico è riportato in figura 5.

(6) Sia $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} = x\sqrt[3]{1 - \frac{3}{x}} = x(1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})) = x - 1 + o(1)$, per cui $y = x - 1$ è asintoto obliquo di f, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$, si ha $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x^3 - 3x^2)^{2/3}} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup [2, 3) \cup (3, +\infty)$. Si ha poi $f'_{\pm}(0) = \lim_{x \to 0^{\pm}} f'(x) = \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{-2x(1+o(1))}{(-3x^2)^{2/3}(1+o(1))} = \lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{2}{\sqrt[3]{9x}(1+o(1))} = \pm\infty$, cioè $x = 0$ è un punto di cuspide, e $f'_{\pm}(3) = \lim_{x \to 3^{\pm}} f'(x) = \lim_{x \to 3^{\pm}} \frac{3+o(1)}{9^{4/3}(x-3)^{2/3}(1+o(1))} = +\infty$, cioè $x = 3$ è un punto di flesso a tangente verticale.

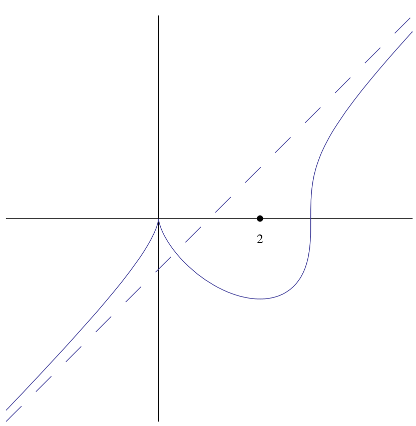


Figura 6: Grafico per l'esercizio 4 (6)

Allora, $x = 2$ è un punto di minimo relativo, mentre $x = 0$ è un punto di massimo relativo. Si ha $f(0) = f(3) = 0$, e $f(2) = -\sqrt[3]{4}$.
Il grafico è riportato in figura 6.

(7) Sia $f(x) = \sqrt{\frac{x^4}{|3-x^2|} - 2}$. Si ha $\operatorname{dom} f = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, -\sqrt{\sqrt{7}-1}] \cup [\sqrt{\sqrt{7}-1}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$, f è continua, e pari. Per $x \to +\infty$, si ha $f(x) = \sqrt{\frac{x^4-2x^2+6}{x^2-3}} = \sqrt{\frac{x^4-3x^2+x^2+6}{x^2-3}} = \sqrt{x^2 + \frac{x^2+6}{x^2-3}} = x\sqrt{1 + \frac{x^2+6}{x^2(x^2-3)}} = x\big(1 + \frac{x^2+6}{2x^2(x^2-3)}\big) = x + o(1)$, per cui $y = x$ è asintoto obliquo di f, per $x \to +\infty$, e, di conseguenza, $y = -x$ è asintoto obliquo di f, per $x \to -\infty$. Per $x \to \sqrt{3}$, si ha $f(x) = \sqrt{\frac{9}{2\sqrt{3}|x-\sqrt{3}|}(1 + o(1))} \to +\infty$, per cui $x = \sqrt{3}$ è asintoto verticale di f.

Inoltre, per ogni $x \in \operatorname{dom} f \cap (0, +\infty)$, si ha $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x^4+2x^2-6}{3-x^2}}, & x \in [\sqrt{\sqrt{7}-1}, \sqrt{3}), \\ \sqrt{\frac{x^4-2x^2+6}{x^2-3}}, & x \in (\sqrt{3}, +\infty), \end{cases}$ per cui $f'(x) = \begin{cases} \frac{x^3(6-x^2)}{(3-x^2)^{3/2}\sqrt{x^4+2x^2-6}}, & x \in (\sqrt{\sqrt{7}-1}, \sqrt{3}), \\ \frac{x^3(x^2-6)}{(x^2-3)^{3/2}\sqrt{x^4-2x^2+6}}, & x \in (\sqrt{3}, +\infty), \end{cases}$ per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (\sqrt{\sqrt{7}-1}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{6}, +\infty)$. Si ha poi $f'_+(\sqrt{\sqrt{7}-1}) = \lim_{x\to(\sqrt{\sqrt{7}-1})^+} f'(x) = +\infty$.

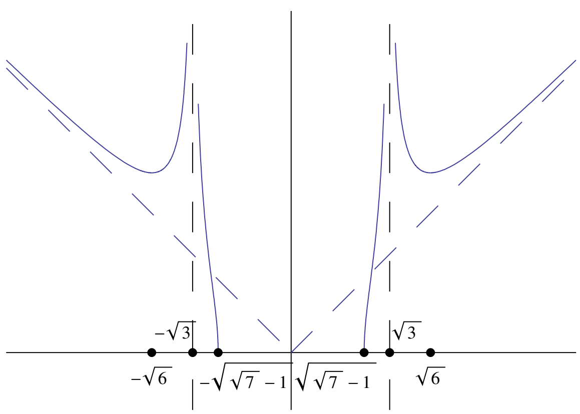


Figura 7: Grafico per l'esercizio 4 (7)

Allora, $x = \pm\sqrt{\sqrt{7}-1}$ e $x = \pm\sqrt{6}$ sono punti di minimo relativo. Si ha $f(\pm\sqrt{\sqrt{7}-1}) = 0$, $f(\pm\sqrt{6}) = \sqrt{10}$.
Il grafico è riportato in figura 7.

(8) Sia $f(x) = x^2\big(\log\frac{x}{4} - 1\big)^2$. Si ha $\operatorname{dom} f = (0, +\infty)$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \to +\infty$, si ha $f(x) = x^2(\log x)^2(1 + o(1))$, per cui f non ha né asintoto orizzontale, né asintoto obliquo, per $x \to +\infty$. Per $x \to 0^+$, si ha $f(x) = x^2(\log x)^2(1 + o(1)) \to 0$.
Inoltre, per ogni $x \in (0, +\infty)$, si ha $f'(x) = 2x\big(\log\frac{x}{4} - 1\big)^2 + x^2 \cdot 2\big(\log\frac{x}{4} - 1\big)\frac{1}{x} = 2x\log\frac{x}{4}\big(\log\frac{x}{4} - 1\big) \geq 0 \iff x \in (0, 4) \cup (4e, +\infty)$. Si ha poi $\lim_{x\to0^+} f'(x) = \lim_{x\to0^+} 2x(\log x)^2(1 + o(1)) = 0$.
Allora, $x = 4$ è un punto di massimo relativo, mentre $4e$ è un punto di minimo relativo. Si ha $f(4) = 16$, $f(4e) = 0$.
Il grafico è riportato in figura 8.

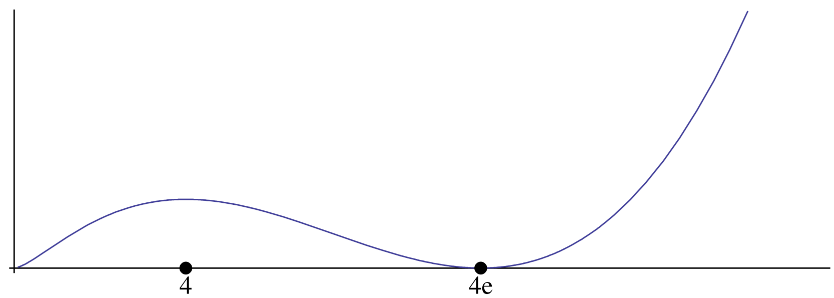


Figura 8: Grafico per l'esercizio 4 (8)

(9) Sia $f(x) = \frac{e^{-x^2}}{x+2}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x \to -2^\pm} \frac{e^{-x^2}}{x+2} = \pm\infty$$
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{-x^2}}{x+2} = 0,$$

per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \frac{-2x(x+2)-1}{(x+2)^2} e^{-x^2} = -\frac{2x^2+4x+1}{(x+2)^2} e^{-x^2} \geq 0 \iff x \in [-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}]$.

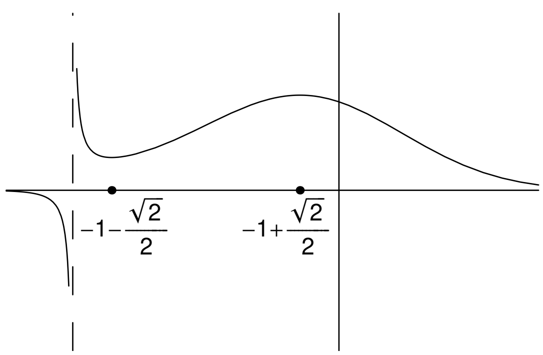


Figura 9: Grafico per l'esercizio 4 (9)

Allora, $x = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di minimo relativo, mentre $x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ è un punto di massimo relativo.
Il grafico è riportato in figura 9.

(10) Sia $f(x) = (x^2 + 12x)e^{-2/x}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f è continua, né pari né dispari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = x^2(1 + o(1))$, per cui f non ha né asintoto orizzontale, né asintoto obliquo, per $x \to \pm\infty$. Per $x \to 0^+$, si ha $f(x) = 12xe^{-2/x}(1 + o(1)) \to 0$, mentre per $x \to 0^-$, si ha $f(x) = 12xe^{-2/x}(1 + o(1)) \to +\infty$, per cui $x = 0$ è asintoto verticale di f.
Inoltre, per ogni $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, si ha $f'(x) = (2x+12)e^{-2/x} + (x^2+12x) \cdot \frac{2}{x^2} e^{-2/x} = \frac{2e^{-2/x}}{x}(x^2+7x+12) \geq 0 \iff x \in (-4, -3) \cup (0, +\infty)$. Si ha poi $\lim_{x \to 0^+} f'(x) \overset{(z=1/x)}{=} \lim_{z \to +\infty} \frac{24z}{e^{2z}}(1 + o(1)) = 0$.
Allora, $x = -4$ è un punto di minimo relativo, mentre -3 è un punto di massimo relativo. Si ha $f(-4) = -32\sqrt{e}$, $f(-3) = -27e^{2/3}$.

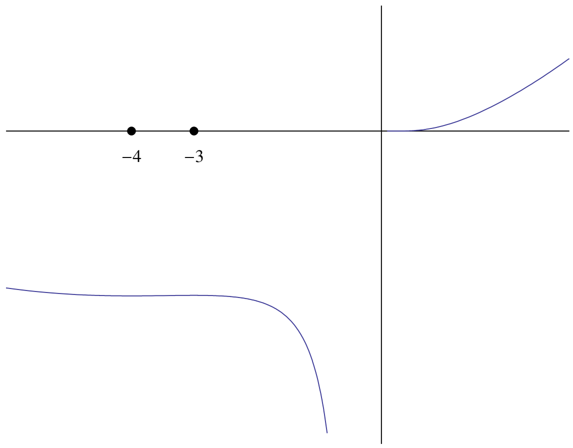


Figura 10: Grafico per l'esercizio 4 (10)

Il grafico è riportato in figura 10.

(11) Sia $f(x) = xe^{\frac{x}{x+1}}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} xe^{\frac{x}{x+1}} = \pm\infty \\
m_\pm :=& \lim_{x\to\pm\infty} \frac{xe^{\frac{x}{x+1}}}{x} = e \\
q_\pm :=& \lim_{x\to\pm\infty} xe^{\frac{x}{x+1}} - ex = \lim_{x\to\pm\infty} ex\Big(e^{\frac{x}{x+1}-1} - 1\Big) = \lim_{x\to\pm\infty} ex\frac{-(1+o(1))}{x+1} = -e \\
&\lim_{x\to(-1)^+} xe^{\frac{x}{x+1}} = 0 \\
&\lim_{x\to(-1)^-} xe^{\frac{x}{x+1}} = -\infty,
\end{aligned}$$

per cui f ha asintoto obliquo $y = ex - e$, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \Big(1 + x\frac{(x+1)-x}{(x+1)^2}\Big)e^{\frac{x}{x+1}} = \frac{x^2+3x+1}{(x+1)^2}e^{\frac{x}{x+1}} > 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.

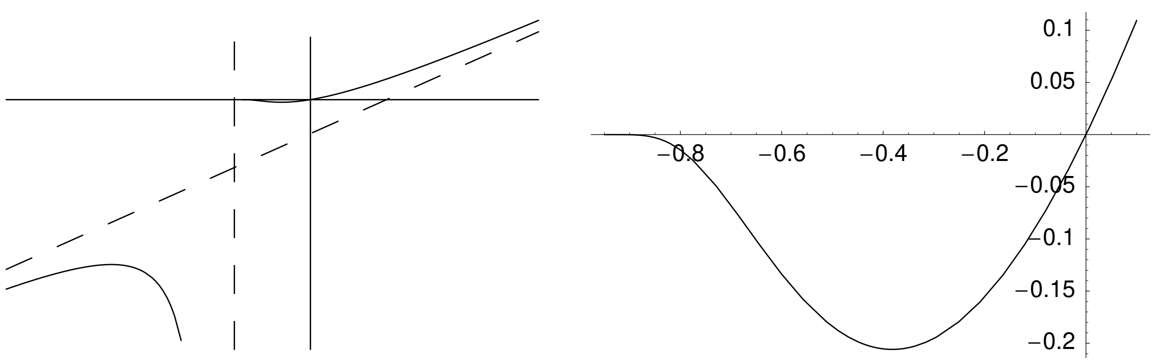


Figura 11: Grafico per l'esercizio 4 (11)

Quindi, f è crescente in $(-\infty, -\frac{3+\sqrt{5}}{2})$ e in $(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$ e decrescente in $(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}, -1)$ e in $(-1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2})$.
Inoltre $x = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo, con $f(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}e^{\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}$, e $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo, con $f(\frac{3-\sqrt{5}}{2}) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}e^{\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-1}}$. Inoltre, $\lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = 0$.
Il grafico è riportato in figura 11, dove è anche riportato il comportamento in un intorno destro di $x = -1$.

(12) Sia $f(x) = |x|e^{\frac{x}{x+1}}$. Poiché $|x|e^{\frac{x}{x+1}} = |xe^{\frac{x}{x+1}}|$, il grafico di f si ottiene da quello dell'esercizio 4 (11).
Osserviamo che l'asintoto obliquo di f, per $x \to -\infty$ ha equazione $y = -e(x-1)$. Infatti

$$m_- := \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|e^{\frac{x}{x+1}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} -e^{1+o(1)} = -e$$
$$q_- := \lim_{x\to-\infty} |x|e^{\frac{x}{x+1}} + ex = \lim_{x\to-\infty} ex\Big(-e^{\frac{x}{x+1}-1} + 1\Big) = \lim_{x\to-\infty} -ex\frac{-(1+o(1))}{x+1} = e.$$

(13) Sia $f(x) = \arcsin\frac{x+1}{x-1}$. Allora $\operatorname{dom} f = \Big\{x \in \mathbb{R} : -1 \le \frac{x+1}{x-1} \le 1\Big\} = (-\infty, 0]$, in quanto

$$\begin{cases} \frac{2x}{x-1} \ge 0 \\ \frac{2}{x-1} \le 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-1 < 0 \\ x \le 0. \end{cases}$$

Inoltre, f è continua, né pari né dispari. Per $x \to -\infty$, si ha $f(x) = \arcsin(1+o(1)) = \frac{\pi}{2} + o(1)$, per cui $y = \frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to -\infty$.
Inoltre,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}} \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{|x|}} < 0,$$

per ogni $x \in (-\infty, 0)$.

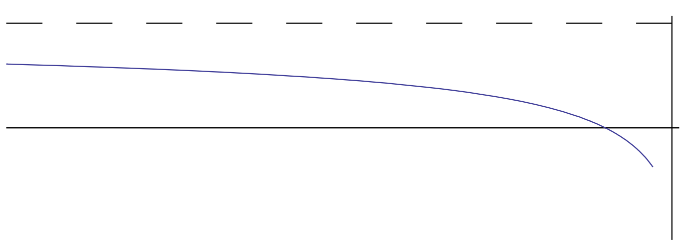


Figura 12: Grafico per l'esercizio 4 (13)

Allora, f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$. Si ha $f(0) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, e $f'_-(0) = \lim_{x\to0^-} f'(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{(x-1)\sqrt{|x|}} = -\infty$.
Il grafico è riportato in figura 12.

(14) Sia $f(x) = \arcsin\frac{1}{x^2-x}$. Allora $\operatorname{dom} f = \Big\{x \in \mathbb{R} : -1 \le \frac{1}{x^2-x} \le 1\Big\} = (-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$, in quanto

$$\begin{cases} \frac{1-x^2+x}{x^2-x} \le 0 \\ \frac{1+x^2-x}{x^2-x} \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x^2-x-1}{x^2-x} \ge 0 \\ \frac{x^2-x+1}{x^2-x} \ge 0 \end{cases} \overset{(a)}{\iff} \begin{cases} x^2-x-1 \ge 0 \\ x^2-x > 0 \end{cases}$$

dove in (a) si è usato $x^2 - x + 1 > 0$, sempre.
Inoltre, f è continua, né pari né dispari. Si ha $\lim_{x\to\pm\infty} \arcsin \frac{1}{x^2-x} = 0$, per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(x^2-x)^2}}} \frac{-(2x-1)}{(x^2-x)^2} = \frac{(1-2x)|x^2-x|}{(x^2-x)^2\sqrt{(x^2-x)^2-1}} = \frac{1-2x}{(x^2-x)\sqrt{(x^2-x)^2-1}},$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$.

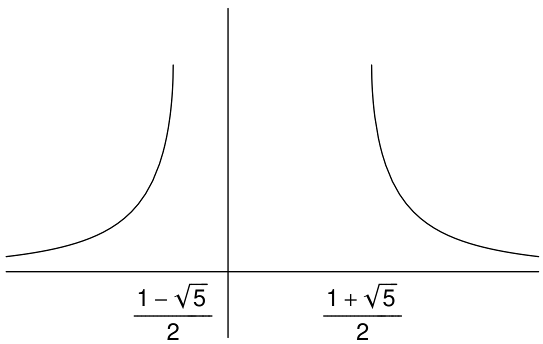


Figura 13: Grafico per l'esercizio 4 (14)

Allora, f è strettamente crescente in $(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}]$, e strettamente decrescente in $[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$. Si ha $f(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, e

$$\lim_{x\to(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^-} f'(x) = \lim_{x\to(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^-} \frac{1-2x}{(x^2-x)\sqrt{(x^2-x)^2-1}} = +\infty$$
$$\lim_{x\to(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^+} f'(x) = \lim_{x\to(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^+} \frac{1-2x}{(x^2-x)\sqrt{(x^2-x)^2-1}} = -\infty,$$

in quanto $(x^2-x)^2 - 1 = (x^2-x-1)(x^2-x+1) = 0 \iff x = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
Il grafico è riportato in figura 13.

(15) Sia $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\log\left(\frac{x}{(x+3)|x+4|}\right)\right)$. Allora $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{(x+3)|x+4|} > 0\} = (-\infty, -4) \cup (-4, -3) \cup (0, +\infty)$. Inoltre, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg}\log\left(\frac{1+o(1)}{|x|}\right) = -\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to-4} f(x) = \lim_{x\to-4} \operatorname{arctg}\big(-\log\big(|x+4|\big)(1+o(1))\big) = +\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to(-3)^-} f(x) = \lim_{x\to(-3)^-} \operatorname{arctg}\big(\log\big(-(x+3)\big)(1+o(1))\big) = -\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \operatorname{arctg}\big(\log x(1+o(1))\big) = -\frac{\pi}{2},$$

per cui $y = -\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.

Inoltre,

$$f'(x) = \frac{1}{1+\big(\log(\frac{x}{(x+3)|x+4|})\big)^2}\,\frac{(x+3)|x+4|}{x}\,\frac{(x+3)|x+4| - x(|x+4| + \operatorname{sgn}(x+4)(x+3))}{(x+3)^2(x+4)^2}$$
$$= \frac{\operatorname{sgn}(x+4)(12-x^2)}{x(x+3)|x+4|}\,\frac{1}{1+\big(\log(\frac{x}{(x+3)|x+4|})\big)^2} = \frac{12-x^2}{x(x+3)(x+4)}\,\frac{1}{1+\big(\log(\frac{x}{(x+3)|x+4|})\big)^2},$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty,-4) \cup [-2\sqrt{3},-3) \cup (0,2\sqrt{3}]$.

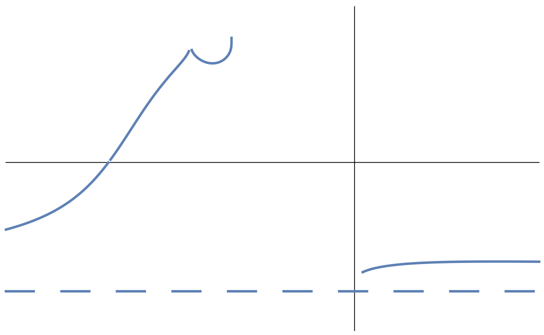


Figura 14: Grafico per l'esercizio 4 (15)

Allora, f è strettamente crescente in $(-\infty,-4]$, in $[-2\sqrt{3},-3)$, e in $(0,2\sqrt{3}]$, e strettamente decrescente in $[-4,-2\sqrt{3}]$, e in $[2\sqrt{3},+\infty)$, mentre $x=-2\sqrt{3}$ è un punto di minimo locale, e $x=2\sqrt{3}$ un punto di massimo locale, e si ha $f(-2\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\log(7+4\sqrt{3})$, $f(2\sqrt{3}) = \operatorname{arctg}\log(7-4\sqrt{3})$. Inoltre

$$\lim_{x\to(-4)^{\pm}} f'(x) = \lim_{x\to(-4)^{\pm}} \frac{-1+o(1)}{(x+4)\big(\log|x+4|\big)^2} = \mp\infty,$$
$$\lim_{x\to(-3)^{-}} f'(x) = \lim_{x\to(-3)^{-}} \frac{-1+o(1)}{(x+3)\big(\log|x+3|\big)^2} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 0^{+}} f'(x) = \lim_{x\to 0^{+}} \frac{1+o(1)}{x\big(\log|x+3|\big)^2} = +\infty.$$

Il grafico è riportato in figura 14.

(16) Sia $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x\exp\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)\right)$. Allora $\operatorname{dom} f = (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$. Inoltre, f è

continua, dispari. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg}\big(x(1+o(1))\big) = \pm\frac{\pi}{2},\\
\lim_{x\to(-1)^-} f(x) &= \lim_{x\to(-1)^-} \operatorname{arctg}\Big(-(1+o(1))\exp\Big(\frac{1}{-2(x+1)(1+o(1))}\Big)\Big) = -\frac{\pi}{2},\\
\lim_{x\to(-1)^+} f(x) &= \lim_{x\to(-1)^+} \operatorname{arctg}\Big(-(1+o(1))\exp\Big(\frac{1}{-2(x+1)(1+o(1))}\Big)\Big) = 0,\\
\lim_{x\to1^-} f(x) &= \lim_{x\to1^-} \operatorname{arctg}\Big((1+o(1))\exp\Big(\frac{1}{2(x-1)(1+o(1))}\Big)\Big) = 0,\\
\lim_{x\to1^+} f(x) &= \lim_{x\to1^+} \operatorname{arctg}\Big((1+o(1))\exp\Big(\frac{1}{2(x-1)(1+o(1))}\Big)\Big) = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

per cui $y = \pm\frac{\pi}{2}$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2e^{2/(x^2-1)}}\Big(1-\frac{2x^2}{(x^2-1)^2}\Big)e^{1/(x^2-1)} = \frac{x^4-4x^2+1}{(x^2-1)^2}\,\frac{e^{1/(x^2-1)}}{1+x^2e^{2/(x^2-1)}},$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{2+\sqrt{3}}] \cup [-\sqrt{2-\sqrt{3}}, \sqrt{2-\sqrt{3}}] \cup [\sqrt{2+\sqrt{3}}, +\infty)$.

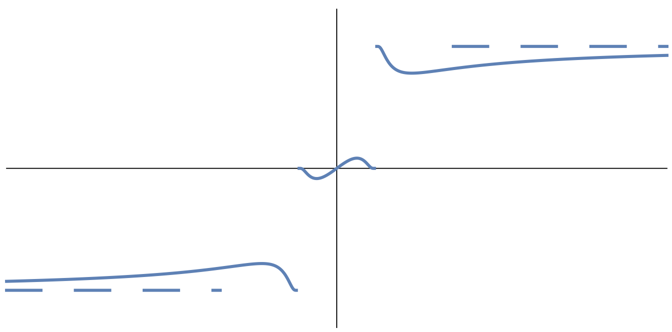


Figura 15: Grafico per l'esercizio 4 (16)

Allora, f è strettamente crescente in $(-\infty, -\sqrt{2+\sqrt{3}}]$, in $[-\sqrt{2-\sqrt{3}}, \sqrt{2-\sqrt{3}}]$, e in $[\sqrt{2+\sqrt{3}}, +\infty)$, e strettamente decrescente in $[-\sqrt{2+\sqrt{3}}, -1)$, in $(-1, -\sqrt{2-\sqrt{3}}]$, in $[\sqrt{2-\sqrt{3}}, 1)$, e in $(1, \sqrt{2+\sqrt{3}}]$, mentre $x = -\sqrt{2+\sqrt{3}}$ e $x = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ sono punti di massimo locale, e $x = -\sqrt{2-\sqrt{3}}$ e $x = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ sono punti di minimo locale, e si ha $f(\pm\sqrt{2+\sqrt{3}}) = \pm \operatorname{arctg}\big(\sqrt{2+\sqrt{3}}\exp\big(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\big)\big)$,

$f(\pm\sqrt{2-\sqrt{3}}) = \pm \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\exp\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\right)$. Inoltre

$$\lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{-\exp\{\frac{1}{-2(x+1)(1+o(1))}\}(1+o(1))}{2(x+1)^2\exp\{\frac{1}{-(x+1)(1+o(1))}\}(1+o(1))} = 0,$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{-\exp\{\frac{1}{-2(x+1)(1+o(1))}\}(1+o(1))}{2(x+1)^2(1+o(1))} = 0,$$

$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{-\exp\{\frac{1}{2(x-1)(1+o(1))}\}(1+o(1))}{2(x-1)^2(1+o(1))} = 0,$$

$$\lim_{x\to1^+} f'(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{-\exp\{\frac{1}{2(x-1)(1+o(1))}\}(1+o(1))}{2(x-1)^2\exp\{\frac{1}{(x-1)(1+o(1))}\}(1+o(1))} = 0.$$

Il grafico è riportato in figura 15.

(17) Sia $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$. Si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, f è continua, 2π-periodica, né pari né dispari. Per $x \to 0$, si ha $f(x) = \frac{1}{x}(1+o(1))$; per $x \to \frac{\pi}{2}$, si ha $f(x) = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+x-\frac{\pi}{2})}(1+o(1)) = -\frac{1}{\sin(x-\frac{\pi}{2})}(1+o(1)) = -\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}(1+o(1))$; per $x \to \pi$, si ha $f(x) = \frac{1}{\sin(\pi+x-\pi)}(1+o(1)) = -\frac{1}{\sin(x-\pi)}(1+o(1)) = -\frac{1}{x-\pi}(1+o(1))$; per $x \to \frac{3\pi}{2}$, si ha $f(x) = \frac{1}{\cos(\frac{3\pi 2}{+}x-\frac{3\pi}{2})}(1+o(1)) = \frac{1}{\sin(x-\frac{3\pi}{2})}(1+o(1)) = \frac{1}{x-\frac{3\pi}{2}}(1+o(1))$. Quindi $x = k\frac{\pi}{2}$ è asintoto verticale di f, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Inoltre, per ogni $x \in \operatorname{dom} f$, si ha $f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)}{\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{(\sin x-\cos x)(1+\frac{1}{2}\sin 2x)}{\sin^2 x\cos^2 x} \geq 0 \iff \sin x - \cos x \geq 0 \iff x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) \mod 2\pi$.

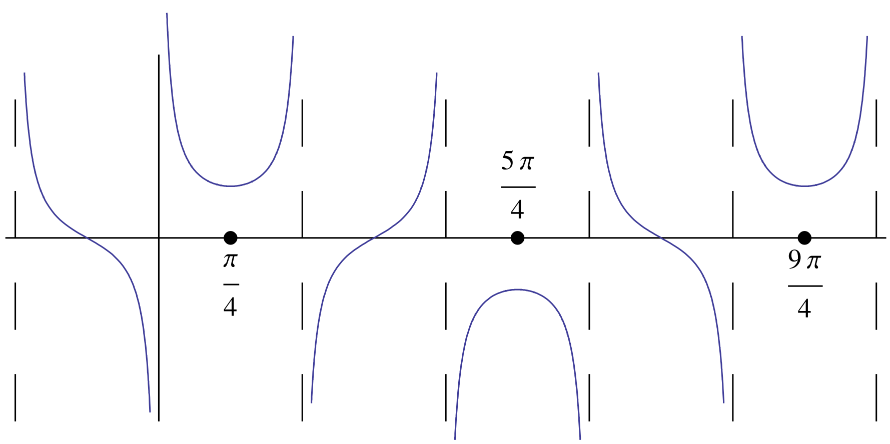


Figura 16: Grafico per l'esercizio 4 (17)

Allora, $x = \frac{\pi}{4}$ è un punto di minimo relativo, mentre $\frac{5\pi}{4}$ è un punto di massimo relativo. Si ha $f(\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}$, $f(\frac{5\pi}{4}) = -2\sqrt{2}$.
Il grafico è riportato in figura 16.

(18) Sia $f(x) = \sin\frac{1}{x^2+1}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Si ha $\lim_{x\to\pm\infty}\sin\frac{1}{x^2+1} = 0$, per cui $y = 0$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$.

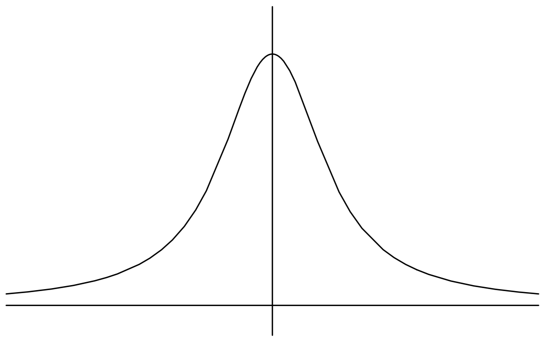


Figura 17: Grafico per l'esercizio 4 (18)

Inoltre, $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} \cos \frac{1}{x^2+1} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0]$, in quanto $0 \leq \frac{1}{x^2+1} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, per cui $\cos \frac{1}{x^2+1} > 0$.
Allora, $x = 0$ è un punto di massimo relativo, con $f(0) = \sin 1$.
Il grafico è riportato in figura 17.

(19) Sia $f(x) = \sin \frac{2x^2-1}{x^2+1}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = \sin \frac{2x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} = \sin 2 + o(1)$, per cui $y = \sin 2$ è asintoto orizzontale di f, per $x \to \pm\infty$. Osserviamo che, posto $g(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$, il cui grafico è riportato nell'esercizio 4 (1), si ha $f(x) = \sin g(x)$.
Inoltre, $f'(x) = g'(x) \cos g(x) = \frac{6x}{(x+1)^2)} \cos \frac{2x^2-1}{x^2+1}$, per cui bisogna studiare la disequazione $\cos \frac{2x^2-1}{x^2+1} \geq 0 \iff \frac{2x^2-1}{x^2+1} \leq \frac{\pi}{2} \iff |x| \leq \sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}$ [vedi il grafico di g nell'esercizio 4 (1)]. Quindi $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}] \cup [0, \sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}]$.

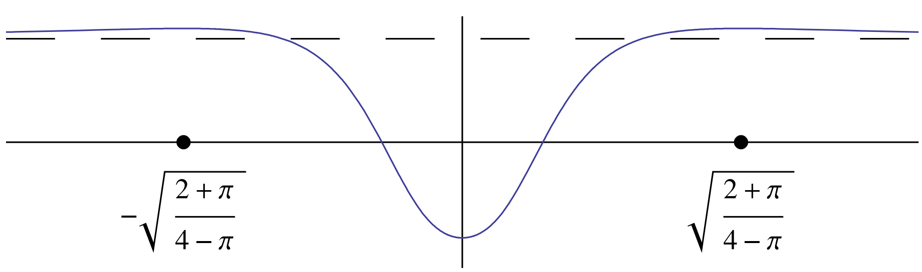


Figura 18: Grafico per l'esercizio 4 (19)

Allora, $x = 0$ è un punto di minimo relativo, mentre $x = \pm\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}$ sono punti di massimo relativo. Si ha $f(0) = -\sin 1$, e $f(\pm\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}) = 1$.
Il grafico è riportato in figura 18.

(20) Sia $f(x) = \sqrt{\cos \frac{2x^2-1}{x^2+1}}$. Osserviamo che, posto $g(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1}$, il cui grafico è riportato nell'esercizio 4 (1), si ha $f(x) = \sqrt{\cos g(x)}$. Allora $\operatorname{dom} f = [-\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}, \sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}]$, f è continua, e pari.

Inoltre, $f'(x) = \frac{-g'(x)\sin g(x)}{2\sqrt{\cos g(x)}} = -\frac{3x}{(x+1)^2)}\frac{\sin\frac{2x^2-1}{x^2+1}}{\sqrt{\cos\frac{2x^2-1}{x^2+1}}}$, per cui bisogna studiare la disequazione $\sin\frac{2x^2-1}{x^2+1} \geq 0 \iff 0 \leq \frac{2x^2-1}{x^2+1} \leq \frac{\pi}{2} \iff \frac{1}{\sqrt{2}} \leq |x| \leq \sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}$ [vedi il grafico di g nell'esercizio 4 (1)]. Quindi $f'(x) \geq 0 \iff x \in [-\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \cup [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. Si ha poi $f'_-(\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}) = \lim_{x\to(\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}})^-} f'(x) = -\lim_{x\to(\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}})^-} \frac{3\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}}{(\frac{2+\pi}{4-\pi}+1)^2}(1+o(1))\,\frac{\sin(\frac{\pi}{2}+o(1))}{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}+o(1))}} = -\infty$.

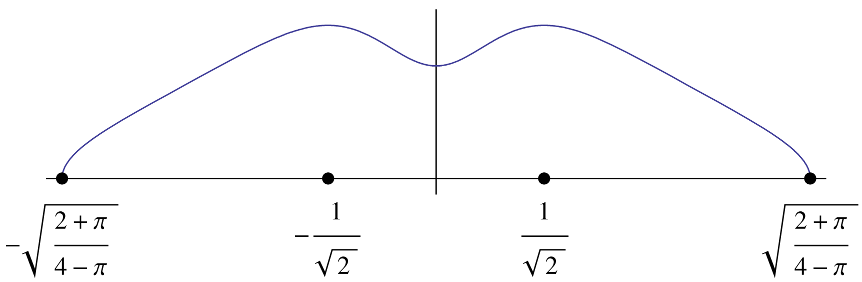


Figura 19: Grafico per l'esercizio 4 (20)

Allora, $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}$ sono punti di minimo relativo, e $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ sono punti di massimo relativo. Si ha $f(0) = \sqrt{\cos 1}$, $f(\pm\sqrt{\frac{2+\pi}{4-\pi}}) = 0$, $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$.
Il grafico è riportato in figura 19.

□

Svolgimento esercizio 5

(1) Sia $f(x) = \frac{x^2+2|x|+1}{x+1}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Poiché

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 0, \\ \frac{x^2-2x+1}{x+1} & x < 0, \end{cases}$$

basta studiare la funzione f per $x < 0$. Si ha

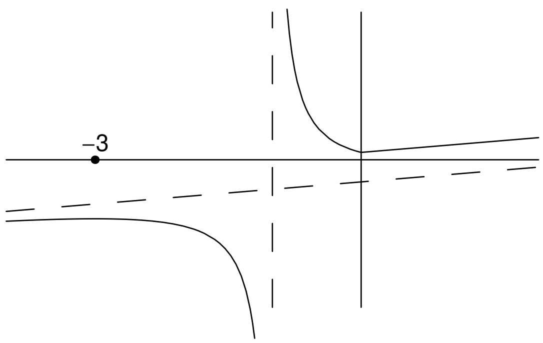
$$\begin{aligned} \lim_{x\to(-1)^\pm} \frac{x^2-2x+1}{x+1} &= \pm\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+1}{x+1} &= \pm\infty \\ m_- := \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+1}{x(x+1)} &= 1 \\ q_- := \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{x^2-2x+1}{x+1} - x\Big) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+1-x^2-x}{x+1} = -3, \end{aligned}$$

per cui f ha asintoto verticale in $x = -1$ e asintoto obliquo $y = x - 3$, per $x \to -\infty$.

Inoltre, per $x < 0$, si ha

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x+1) - (x^2 - 2x + 1)}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 - 2x + 2x - 2 - x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} \iff x \leq -3.$$

Quindi, f è crescente in $(-\infty, -3)$ e in $(0, +\infty)$, e decrescente in $(-3, -1)$, e in $(-1, 0)$, per cui, $x = -3$ è un punto di massimo relativo, con $f(-3) = -8$, e $x = 0$ e è un punto di minimo relativo, con $f(0) = 1$. Osserviamo che $f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = -3$, mentre $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$, per cui $x = 0$ è un punto angoloso.



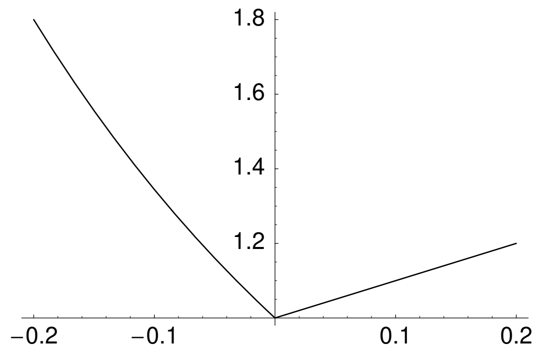


Figura 20: Grafico per l'esercizio 5 (1)

Ancora,

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x-3)}{(x+1)^4} = \frac{2x^2 + 2x + 2x + 2 - 2x^2 - 4x + 6}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{8}{(x+1)^3} > 0 \iff x > -1.$$

Quindi, f è convessa in $(-1, 0)$ e in $(0, +\infty)$, ed è concava in $(-\infty, -1)$, mentre non ci sono punti di flesso per f.

Il grafico è riportato in figura 20, dove è anche riportato il comportamento in un intorno di $x = 0$.

(2) Sia $f(x) = \frac{4|x^2+x|-1}{x^2}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{4|x^2+x|-1}{x^2} = 4$$
$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{4|x^2+x|-1}{x^2} = -\infty,$$

per cui f ha asintoto verticale in $x = 0$ e asintoto orizzontale $y = 4$, per $x \to \pm\infty$.

Poiché

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2+4x-1}{x^2} & x \leq -1 \text{ o } x > 0, \\ -\frac{4x^2+4x+1}{x^2} & -1 < x < 0, \end{cases}$$

si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(8x+4)x^2-2x(4x^2+4x-1)}{x^4} = \frac{8x^3+4x^2-8x^3-8x^2+2x}{x^4} = \frac{-4x^2+2x}{x^4} = \frac{2(1-2x)}{x^3} & x < -1 \text{ o } x > 0, \\ -\frac{(8x+4)x^2-2x(4x^2+4x+1)}{x^4} = -\frac{8x^3+4x^2-8x^3-8x^2-2x}{x^4} = \frac{4x^2+2x}{x^4} = \frac{2(2x+1)}{x^3} & -1 < x < 0. \end{cases}$$

Poiché

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 \iff & \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 0 \\ \frac{1-2x}{x^3} \geq 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ \frac{2x+1}{x^3} \geq 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 0 \\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \end{cases} \bigvee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x < -\frac{1}{2} \text{ o } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ne segue che $f'(x) \geq 0 \iff x \in (-1, -\frac{1}{2}] \cup (0, \frac{1}{2}]$. Quindi, f è crescente in $(-1, -\frac{1}{2})$ e in $(0, \frac{1}{2})$, e decrescente in $(-\infty, -1)$, in $(-\frac{1}{2}, 0)$ e in $(\frac{1}{2}, +\infty)$, per cui, $x = -1$ è un punto di minimo relativo, con $f(-1) = -1$, e $x = \pm\frac{1}{2}$ sono punti di massimo relativo, con $f(-\frac{1}{2}) = 0$ e $f(\frac{1}{2}) = 8$. Osserviamo che $f'_-(-1) = \lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = -6$, mentre $f'_-(-1) = \lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = 2$, per cui $x = -1$ è un punto angoloso.

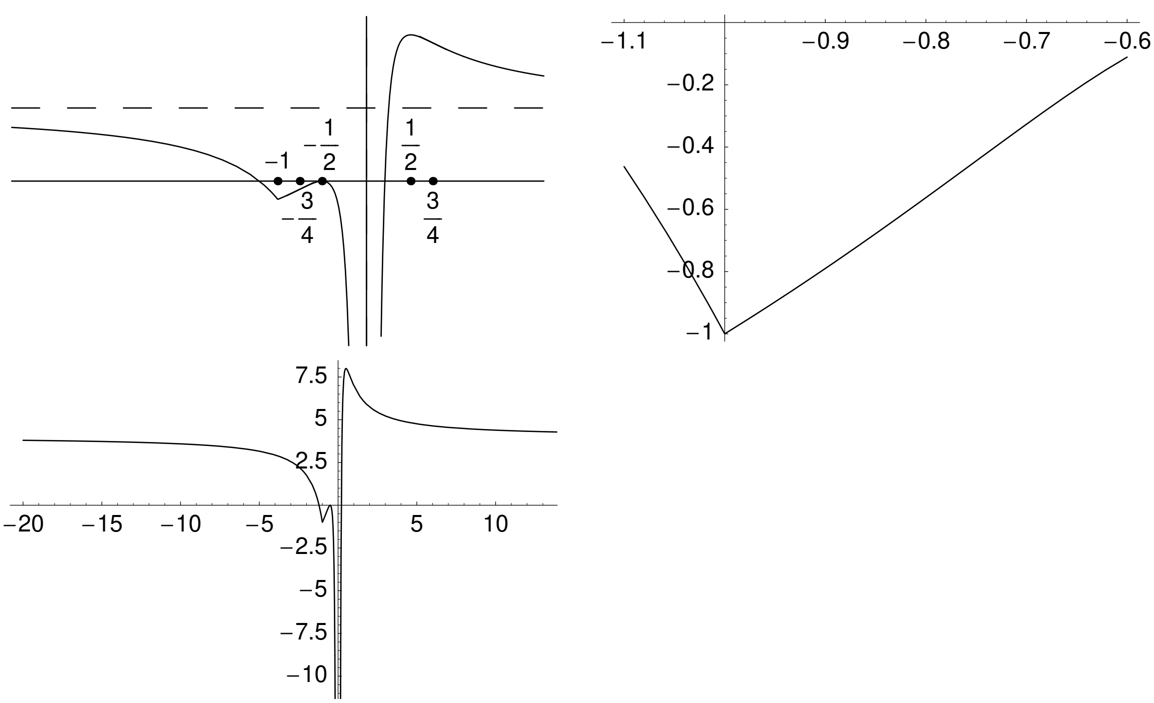


Figura 21: Grafico per l'esercizio 5 (2)

Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2\left(-2x^3-3x^2(1-2x)\right)}{x^6} = \frac{2(4x-3)}{x^4} & x < -1 \text{ o } x > 0, \\ \frac{2\left(2x^3-3x^2(2x+1)\right)}{x^6} = \frac{-2(4x+3)}{x^4} & -1 < x < 0, \end{cases}$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in (-1, -\frac{3}{4}] \cup [\frac{3}{4}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-1, -\frac{3}{4})$ e in $(\frac{3}{4}, +\infty)$, ed è concava in $(-\infty, -1)$, in $(-\frac{1}{2}, 1)$ e in $(1, +\infty)$, mentre $x = -\frac{3}{4}$ e $x = \frac{3}{4}$ sono punti di flesso per f.

Il grafico è riportato in figura 21, dove è anche riportato il comportamento in un intorno di $x = -1$, e il comportamento per x grandi.

(3) Sia $f(x) = \frac{|x^2-1|-1}{(x-1)^2}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x^2-1|-1}{(x-1)^2} = 1$$
$$\lim_{x\to 1^\pm} \frac{|x^2-1|-1}{(x-1)^2} = -\infty,$$

per cui f ha asintoto verticale in $x = 1$ e asintoto orizzontale $y = 1$, per $x \to \pm\infty$.
Poiché

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2}{(x-1)^2} & x \le -1 \text{ o } x > 1, \\ -\frac{x^2}{(x-1)^2} & -1 < x < 1, \end{cases}$$

si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2)}{(x-1)^4} = \frac{2x^2-2x-2x^2+4}{(x-1)^3} = \frac{2(2-x)}{(x-1)^3} & x < -1 \text{ o } x > 1, \\ -\frac{2x(x-1)^2-2(x-1)x^2}{(x-1)^4} = -\frac{2x^2-2x-2x^2}{(x-1)^3} = \frac{2x}{(x-1)^3} & -1 < x < 1. \end{cases}$$

Poiché

$$f'(x) \ge 0 \iff \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 1 \\ \frac{2-x}{(x-1)^3} \ge 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} -1 < x < 1 \\ \frac{2x}{(x-1)^3} \ge 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x < -1 \text{ o } x > 1 \\ 1 \le x \le 2 \end{cases} \bigvee \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \le 0 \text{ o } x > 1, \end{cases}$$

ne segue che $f'(x) \ge 0 \iff x \in (-1, 0] \cup (1, 2]$. Quindi, f è crescente in $(-1, 0)$ e in $(1, 2)$, e decrescente in $(-\infty, -1)$, in $(0, 1)$ e in $(2, +\infty)$, per cui, $x = -1$ è un punto di minimo relativo, con $f(-1) = -\frac{1}{4}$, e $x = 0$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo, con $f(0) = 0$ e $f(2) = 2$. Osserviamo che $f'_-(-1) = \lim_{x\to(-1)^-} f'(x) = -\frac{3}{4}$, mentre $f'_-(-1) = \lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = \frac{1}{4}$, per cui $x = -1$ è un punto angoloso.
Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2\left(-(x-1)^3-3(x-1)^2(2-x)\right)}{(x-1)^6} = \frac{2(2x-5)}{(x-1)^4} & x < -1 \text{ o } x > 0, \\ \frac{2\left((x-1)^3-3(x-1)^2x\right)}{(x-1)^6} = \frac{-2(2x+1)}{(x-1)^4} & -1 < x < 0, \end{cases}$$

per cui $f''(x) \ge 0 \iff x \in (-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-1, -\frac{1}{2})$ e in $(\frac{5}{2}, +\infty)$, ed è concava in $(-\infty, -1)$, in $(-\frac{1}{2}, 1)$ e in $(1, \frac{5}{2})$, mentre $x = -\frac{1}{2}$ e $x = \frac{5}{2}$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 22, dove è anche riportato il comportamento in un intorno di $x = -1$, in un intorno di $x = -\frac{1}{2}$, e il comportamento per x grandi.

(4) Sia $f(x) = x - \log(x^2 + x + 1)$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ [perché $x^2 + x + 1 > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$], f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} x - \log(x^2 + x + 1) = \pm\infty$$
$$m_\pm := \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - \log(x^2 + x + 1)}{x} = 1$$
$$q_\pm := \lim_{x\to\pm\infty} x - \log(x^2 + x + 1) - x = -\infty,$$

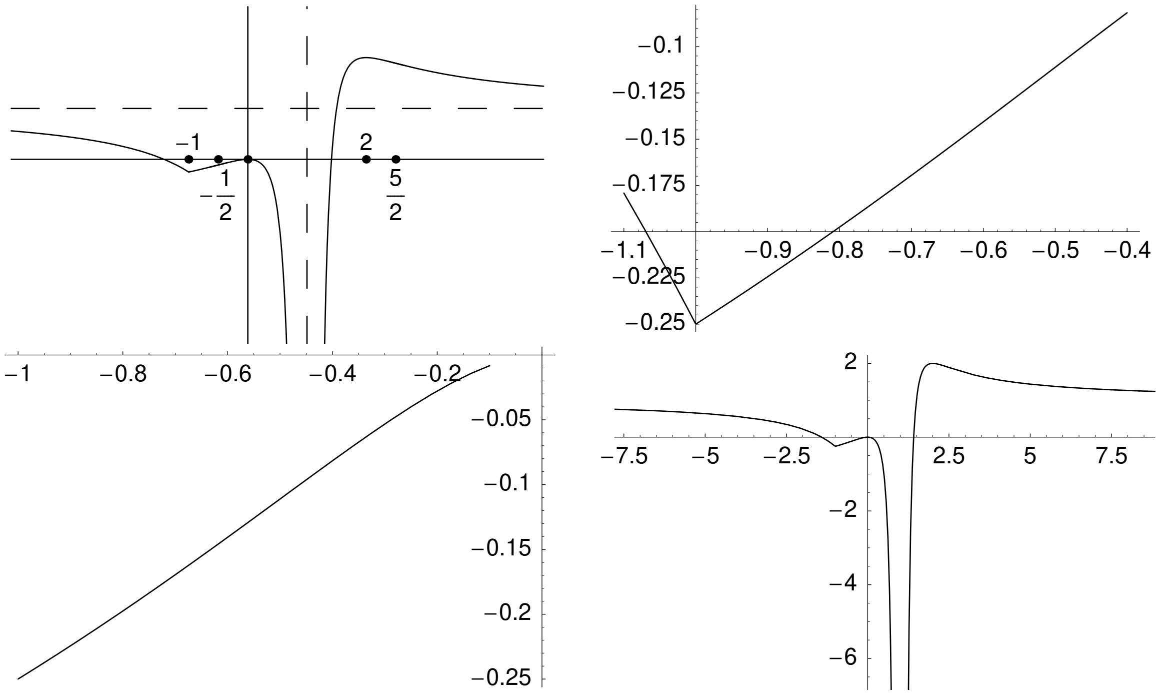


Figura 22: Grafico per l'esercizio 5 (3)

per cui f non ha asintoto orizzontale né obliquo, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-2x-1}{x^2+x+1} = \frac{x^2-x}{x^2+x+1} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$. Quindi, f è crescente in $(-\infty, 0)$ e in $(1, +\infty)$, e decrescente in $(0, 1)$, per cui, $x = 0$ è un punto di massimo relativo, con $f(0) = 0$, e $x = 1$ è un punto di minimo relativo, con $f(1) = 1 - \log 3$.
Ancora,

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (2x+1)(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2} \\
&= \frac{(2x^3 - x^2 + 2x^2 - x + 2x - 1) - (2x^3 + x^2 - 2x^2 - x)}{(x^2+x+1)^2} \\
&= \frac{2x^2 + 2x - 1}{(x^2+x+1)^2}
\end{aligned}
$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2})$ e in $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$, ed è concava in $(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2})$, mentre $x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 23, dove è anche riportato il comportamento in un intorno destro di $x = 0$, e il comportamento per x grandi.

(5) Sia $f(x) = |x| - \log(x^2 + x + 1)$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ [perché $x^2 + x + 1 > 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$], f è

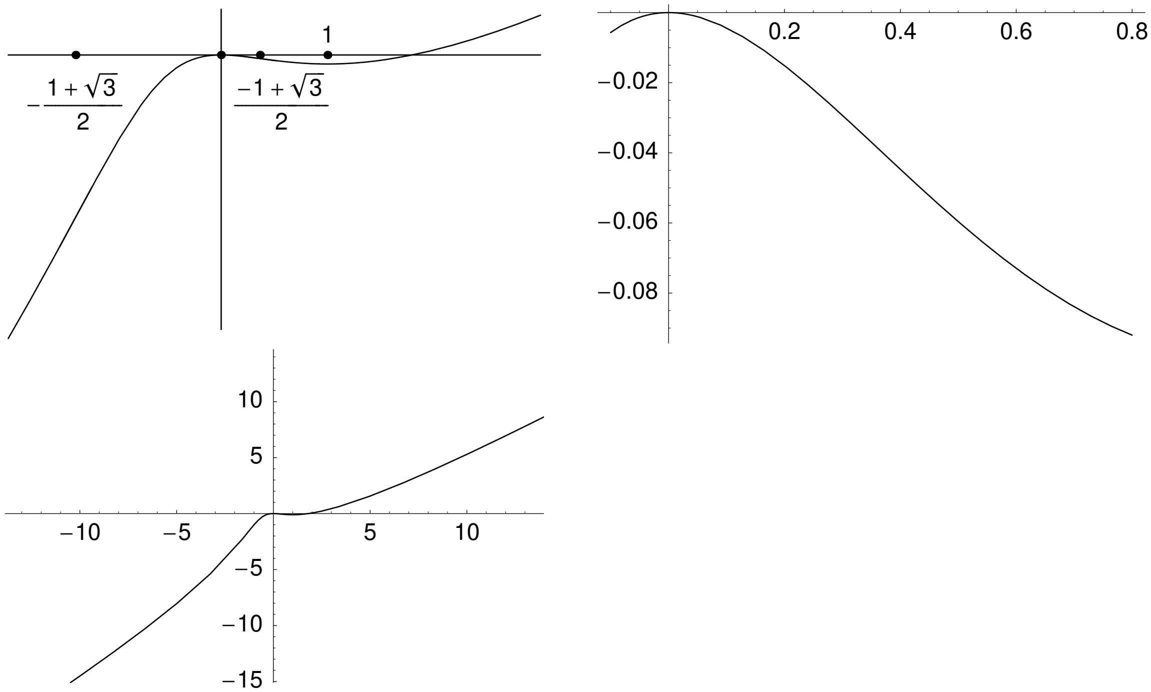


Figura 23: Grafico per l'esercizio 5 (4)

continua, né pari né dispari. Si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty} |x| - \log(x^2+x+1) = +\infty \\
m_\pm &:= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x| - \log(x^2+x+1)}{x} = \pm 1 \\
q_\pm &:= \lim_{x\to\pm\infty} |x| - \log(x^2+x+1) - (\pm x) = -\infty,
\end{aligned}$$

per cui f non ha asintoto orizzontale né obliquo, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-2x-1}{x^2+x+1} = \frac{x^2-x}{x^2+x+1} & x > 0 \\ -1 - \frac{2x+1}{x^2+x+1} = -\frac{x^2+x+1+2x+1}{x^2+x+1} = -\frac{x^2+3x+2}{x^2+x+1} & x < 0, \end{cases}$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \in [-2,-1] \cup [1,+\infty)$. Quindi, f è crescente in $(-2,-1)$ e in $(1,+\infty)$, e decrescente in $(-\infty,-2)$ e in $(-1,1)$, per cui, $x=-2$ e $x=1$ sono punti di minimo relativo, con $f(-2) = 2 - \log 3$ e $f(1) = 1 - \log 3$, e $x=-1$ è un punto di massimo relativo, con $f(-1) = 1$.
Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{(2x-1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2-x)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2} & x > 0 \\ -\frac{(2x+3)(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2+3x+2)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{2x^2+2x-1}{(x^2+x+1)^2} & x < 0, \end{cases}$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -\frac{1+\sqrt{3}}{2})$ e in $(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$, ed è concava in $(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2})$, mentre $x = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ sono punti di flesso per f.

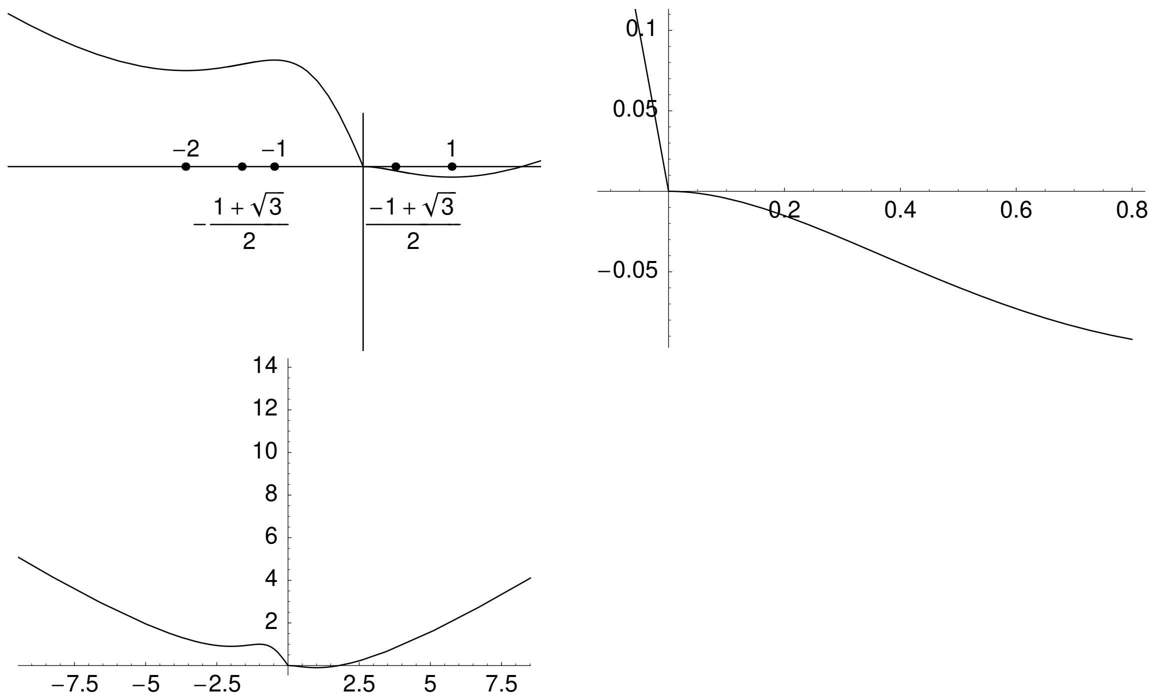


Figura 24: Grafico per l'esercizio 5 (5)

Il grafico è riportato in figura 24, dove è anche riportato il comportamento in un intorno destro di $x = 0$, e il comportamento per x grandi.

(6) Sia $f(x) = (x^2 + x)e^{x+1}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty}(x^2+x)e^{x+1} &= 0 \\ \lim_{x\to+\infty}(x^2+x)e^{x+1} &= +\infty \\ m_+ := \lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+x)e^{x+1}}{x} &= +\infty, \end{aligned}$$

per cui f ha asintoto orizzontale $y = 0$, per $x \to -\infty$, mentre non ha asintoto orizzontale né obliquo, per $x \to +\infty$.
Inoltre, $f'(x) = (x^2 + 3x + 1)e^{x+1} \geq 0 \iff x \in (-\infty, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$.
Allora, $x = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo, con $f(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = (2+\sqrt{5})e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, e $x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo per f, con $f(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}) = (2-\sqrt{5})e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.
Ancora, $f''(x) = (x^2 + 5x + 4)e^{x+1} \geq 0 \iff x \in (-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -4)$ e in $(-1, +\infty)$, ed è concava in $(-4, -1)$, mentre $x = -4$ e $x = -1$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 25.

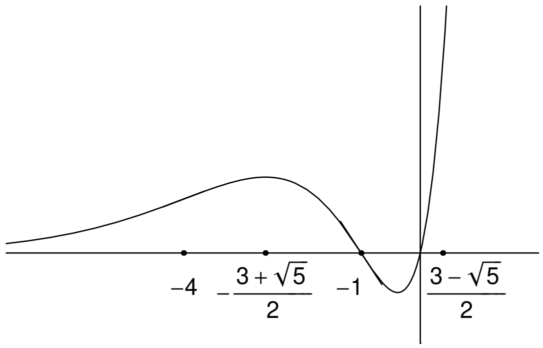


Figura 25: Grafico per l'esercizio 5 (6)

(7) Sia $f(x) = (x^2 + x)e^{-(x+1)}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2 + x)e^{-(x+1)} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} (x^2 + x)e^{-(x+1)} = +\infty$$
$$m_- := \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2 + x)e^{-(x+1)}}{x} = +\infty,$$

per cui f ha asintoto orizzontale $y = 0$, per $x \to +\infty$, mentre non ha asintoto orizzontale né obliquo, per $x \to -\infty$.
Inoltre, $f'(x) = -(x^2 - x - 1)e^{-(x+1)} \geq 0 \iff x \in [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$.

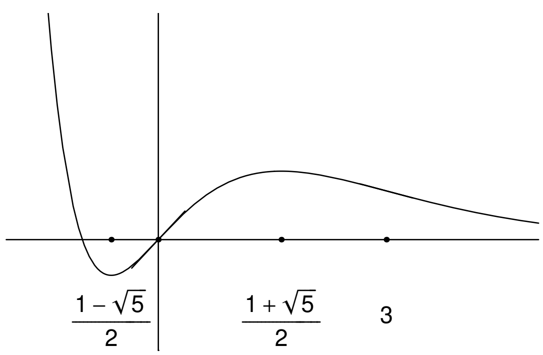


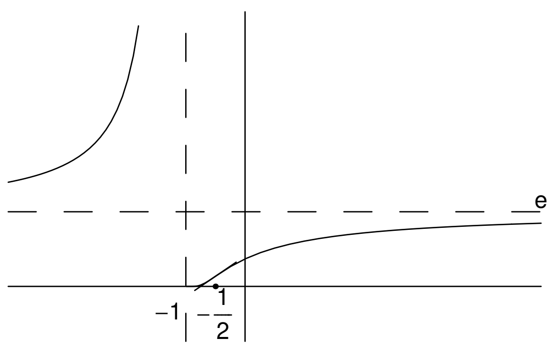
Figura 26: Grafico per l'esercizio 5 (7)

Allora, $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ è un punto di minimo relativo, con $f(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = (2 - \sqrt{5})e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$, e $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ è un punto di massimo relativo per f, con $f(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) = (2 + \sqrt{5})e^{-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.
Ancora, $f''(x) = (x^2 - 3x)e^{-(x+1)} \geq 0 \iff x \in (-\infty, 0] \cup [3, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, 0)$ e in $(3, +\infty)$, ed è concava in $(0, 3)$, mentre $x = 0$ e $x = 3$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 26.

(8) Sia $f(x) = e^{\frac{x}{x+1}}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = e$$
$$\lim_{x\to(-1)^+} e^{\frac{x}{x+1}} = 0$$
$$\lim_{x\to(-1)^-} e^{\frac{x}{x+1}} = +\infty,$$

per cui f ha asintoto orizzontale $y = e$, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \frac{(x+1)-x}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}} > 0$, per ogni $x \in \operatorname{dom} f$. Quindi, f è crescente in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, +\infty)$. Inoltre, $\lim_{x\to(-1)^+} f'(x) = 0$.



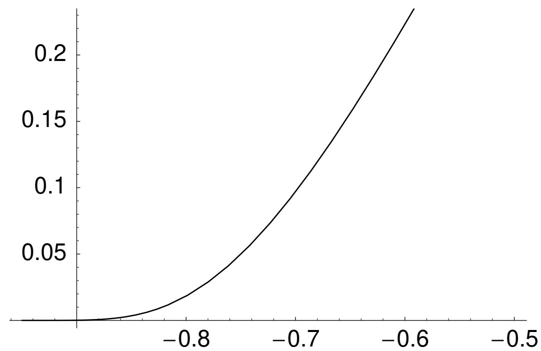


Figura 27: Grafico per l'esercizio 5 (8)

Ancora, $f''(x) = \left(-\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}\right) e^{\frac{x}{x+1}} = -\frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}} \geq 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2})$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -1)$ e in $(-1, -\frac{1}{2})$, ed è concava in $(-\frac{1}{2}, +\infty)$, mentre $x = -\frac{1}{2}$ è un punto di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 27, dove è anche riportato il comportamento in un intorno destro di $x = -1$.

(9) Sia $f(x) = e^{\frac{x}{|x+1|}}$. Allora $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, f è continua, né pari né dispari. Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x}{|x+1|}} = e$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{x}{|x+1|}} = \frac{1}{e}$$
$$\lim_{x\to(-1)^+} e^{\frac{x}{|x+1|}} = 0$$
$$\lim_{x\to(-1)^-} e^{\frac{x}{|x+1|}} = 0,$$

per cui f ha asintoto orizzontale $y = e$, per $x \to +\infty$, e asintoto orizzontale $y = \frac{1}{e}$, per $x \to -\infty$.
Inoltre, $f'(x) = \frac{|x+1| - x\operatorname{sgn}(x+1)}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{|x+1|}} = \begin{cases} -\frac{1}{(x+1)^2} e^{-\frac{x}{x+1}} & x < -1 \\ \frac{1}{(x+1)^2} e^{\frac{x}{x+1}} & x > -1, \end{cases}$
per cui $f'(x) > 0$, per ogni $x \in (-1, +\infty)$. Quindi, f è decrescente in $(-\infty, -1)$ e crescente in $(-1, +\infty)$ [per cui, $x = -1$ sarebbe un punto di minimo relativo, se $-1 \in \operatorname{dom} f$]. Inoltre, $\lim_{x\to(-1)^\pm} f'(x) = 0$.

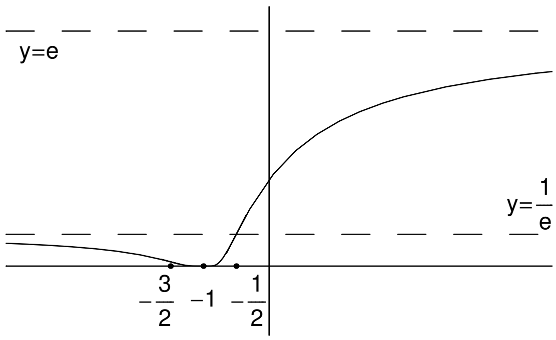


Figura 28: Grafico per l'esercizio 5 (9)

Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}\right)e^{-\frac{x}{x+1}} = \frac{2x+3}{(x+1)^4}e^{-\frac{x}{x+1}} & x < -1 \\ \left(-\frac{2}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}\right)e^{-\frac{x}{x+1}} = -\frac{2x+1}{(x+1)^4}e^{-\frac{x}{x+1}} & x > -1, \end{cases}$$

per cui $f''(x) \geq 0 \iff x \in [-\frac{3}{2}, -1) \cup (-1, -\frac{1}{2}]$. Quindi, f è convessa in $[-\frac{3}{2}, -1)$ e in $(-1, -\frac{1}{2})$, ed è concava in $(-\infty, -\frac{3}{2})$ e in $(-\frac{1}{2}, +\infty)$, mentre $x = -\frac{3}{2}$ e $x = -\frac{1}{2}$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 28.

(10) Sia $f(x) = \mathrm{arctg}(1 - x^2)$. Allora $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R}$, f è continua, e pari. Per $x \to \pm\infty$, si ha $f(x) = -\frac{\pi}{2} + o(1)$, per cui f ha asintoto orizzontale $y = -\frac{\pi}{2}$, per $x \to \pm\infty$.
Inoltre si ha $f'(x) = \frac{-2x}{1+(1-x^2)^2}$. Poiché $f'(x) > 0 \iff x < 0$, ne segue che f è crescente in $(-\infty, 0)$, e decrescente in $(0, +\infty)$, per cui $x = 0$ è un punto di massimo relativo, con $f(0) = \frac{\pi}{4}$.

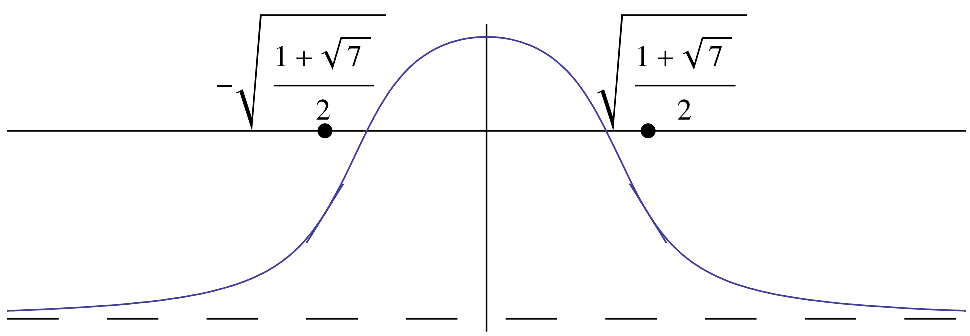


Figura 29: Grafico per l'esercizio 5 (10)

Ancora, $f''(x) = -2\frac{1+(x^2-1)^2 - x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{\left(1+(x^2-1)^2\right)^2} = -2\frac{1+x^4-2x^2+1-4x^4+4x^2}{\left(1+(x^2-1)^2\right)^2} = \frac{2(3x^4-2x^2-2)}{\left(1+(x^2-1)^2\right)^2}$ ed essendo $3x^4 - 2x^2 - 2 \geq 0 \iff x^2 \geq \frac{1+\sqrt{7}}{2}$, si ha $f''(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}})$ e in $(\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, +\infty)$, ed è concava in $(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}})$, mentre $x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 29.

(11) Sia $f(x) = \mathrm{arctg}(1-x^2) + \mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{|1-x^2|}\Big)$. Allora $\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, f è continua, e pari. Si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{arctg}(1-x^2) + \mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{|1-x^2|}\Big) = -\frac{\pi}{2}$$
$$\lim_{x\to 1^\pm} \mathrm{arctg}(1-x^2) + \mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{|1-x^2|}\Big) = \frac{\pi}{2},$$

per cui f può essere prolungata per continuità anche in $x = \pm 1$, e ha asintoto orizzontale $y = -\frac{\pi}{2}$, per $x \to \pm\infty$.
Poiché

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{arctg}(1-x^2) + \mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{1-x^2}\Big) = \frac{\pi}{2} & -1 < x < 1, \\ \mathrm{arctg}(1-x^2) + \mathrm{arctg}\Big(\frac{1}{x^2-1}\Big) & x < -1 \text{ o } x > 1, \end{cases}$$

si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 1, \\ \frac{-2x}{1+(1-x^2)^2} + \frac{-\frac{2x}{(x^2-1)^2}}{1+\frac{1}{(x^2-1)^2}} = \frac{-4x}{1+(1-x^2)^2} & x < -1 \text{ o } x > 1. \end{cases}$$

Poiché $f'(x) > 0 \iff x < -1$, ne segue che f è crescente in $(-\infty, -1)$, è costante in $(-1, 1)$, e decrescente in $(1, +\infty)$, per cui ogni $x \in [-1, 1]$ è un punto di massimo relativo, con $f(x) = \frac{\pi}{2}$. Osserviamo che $f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0$, mentre $f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -4$, per cui $x = \pm 1$ sono punti angolosi.

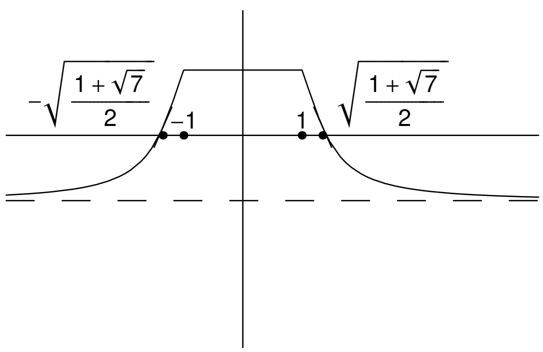


Figura 30: Grafico per l'esercizio 5 (11)

Ancora,

$$f''(x) = \begin{cases} -4\frac{1+(x^2-1)^2 - x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{\big(1+(x^2-1)^2\big)^2} = -4\frac{1+x^4-2x^2+1-4x^4+4x^2}{\big(1+(x^2-1)^2\big)^2} = \frac{4(3x^4-2x^2-2)}{\big(1+(x^2-1)^2\big)^2} & x < -1 \text{ o } x > 1, \\ 0 & -1 < x < 1, \end{cases}$$

ed essendo $3x^4 - 2x^2 - 2 \ge 0 \iff x^2 \ge \frac{1+\sqrt{7}}{2}$, si ha $f''(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, +\infty)$. Quindi, f è convessa in $(-\infty, -\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}})$ e in $(\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, +\infty)$, ed è concava in $(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}, -1)$ e in $(1, \sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}})$, mentre $x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}$ sono punti di flesso per f.
Il grafico è riportato in figura 30.

□

Svolgimento esercizio 6

(1) Poiché $f'(x) = 3x^2 e^{x^3} + e^{\operatorname{arctg}(3x)} \frac{6}{1+9x^2} > 0$, $x \in \mathbb{R}$, ne segue che f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, e quindi ivi iniettiva. Allora $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{6}$.

(2) Poiché $f'(x) = \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2+e} > 0$, $x > 0$, ne segue che f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$, e quindi ivi iniettiva. Allora $(f^{-1})'(\log(2+e)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{2+e}{5}$.

(3) Si ha $f'(x) = \frac{-1+\sin x}{5\sqrt[5]{(1-x-\cos x)^4}}$, definita per $x \neq 0$, in quanto, posto $g(x) = 1 - x - \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, si ha $g'(x) = -1 + \sin x < 0$, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$, per cui g è strettamente decrescente e quindi iniettiva in $\mathbb{R}$, e quindi si annulla solo per $x = 0$. Inoltre, $f'(x) < 0$, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus (\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\})$, per cui f è strettamente decrescente e quindi iniettiva in $\mathbb{R}$. Allora $(f^{-1})'(0) = \lim_{y\to 0}(f^{-1})'(y) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{f'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5|o(1)|}{-1+o(1)} = 0$.

(4) Si ha $f'(x) = 2e^{2x} - 4x$, $x \in \mathbb{R}$, e $f''(x) = 4e^{2x} - 4 \geq 0 \iff x \geq 0$, per cui f' è decrescente in $(-\infty, 0)$ e crescente in $(0, +\infty)$, e ha un minimo assoluto in $x = 0$, che vale $f'(0) = 2$, per cui $f'(x) \geq 2 > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Ne segue che f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, e quindi ivi iniettiva. Allora $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$.

(5) Si ha $f'(x) = x - e^x$, $x \in \mathbb{R}$, e $f''(x) = 1 - e^x \geq 0 \iff x \leq 0$, per cui f' è crescente in $(-\infty, 0)$ e decrescente in $(0, +\infty)$, e ha un massimo assoluto in $x = 0$, che vale $f'(0) = -1$, per cui $f'(x) \leq -1 < 0$, $x \in \mathbb{R}$. Ne segue che f è strettamente decrescente in $\mathbb{R}$, e quindi ivi iniettiva. Allora $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(0)} = -1$.

$\square$

Svolgimento esercizio 7

(1) Si ha $f(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^6)\right) - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{48}x^6 + o(x^6)\right) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{7}{360}x^6 + o(x^6)$.

(2) Posto $y = x - 1$, si ha $f(x) = f(1+y) = \log\left(1 + \frac{2y}{3}\right) - \log\left(1 + \frac{y}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}y - \frac{2}{9}y^2 + \frac{8}{81}y^3 - \frac{4}{81}y^4 + o(y^4)\right) - \left(\frac{1}{3}y - \frac{1}{18}y^2 + \frac{1}{81}y^3 - \frac{1}{324}y^4 + o(y^4)\right) = \frac{1}{3}y - \frac{1}{6}y^2 + \frac{7}{81}y^3 - \frac{5}{108}y^4 + o(y^4) = \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{6}(x-1)^2 + \frac{7}{81}(x-1)^3 - \frac{5}{108}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$.

(3) Si ha $f(x) = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + o(x^7)\right)\left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)\right) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{2}x^2\left(x^2 - \frac{1}{2}x^4\right) + \frac{1}{4!}x^4 \cdot x^2 + o(x^6) = x^2 - x^4 + \frac{5}{8}x^6 + o(x^6)$.

(4) Si ha $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)\right)\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\right) - x\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{12}x^5 + o(x^5) - x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^5) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{12}x^5 + o(x^5)$.

(5) Si ha $f(x) = \left(1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5) - 1 + x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^5)\right)^2 = \frac{1}{9}x^8 + o(x^9)$.

(6) Si ha $f(x) = x^2\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)\right)^2 - \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^7)\right) = x^2\left(x^2 - x^3 + \frac{11}{12}x^4 + o(x^4)\right)^2 - \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^7)\right) = -1 + 2x^2 + \frac{1}{3}x^4 - x^5 + \frac{181}{180}x^6 + o(x^6)$.

(7) Si ha $f(x) = (x^2+x^3) - \frac{1}{6}(x^2+x^3)^3 + o(x^8) = x^2 + x^3 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^7 - \frac{1}{2}x^8 + o(x^8)$.

(8) Si ha $f(x) = 2\log\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) + \left(x^2 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^9)\right) = 2\Big(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\Big) - \Big(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\Big)^2 + o(x^4) + x^2 + o(x^5) = -\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)$.

(9) Si ha $f(x) = \left(x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 + 2\log\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) + 2\Big(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\Big) - \Big(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)\Big)^2 + o(x^4) = x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4) = \frac{1}{6}x^4(1+o(1))$.

(10) Posto $y = x-1$, si ha $f(x) = f(y+1) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}y\right) - \log\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}y\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) - \log\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) = 1 - \frac{\pi^2}{8}y^2 + \frac{\pi^4}{384}y^4 + o(y^4) - \log\left(1 - \frac{\pi^2}{8}y^2 + \frac{\pi^4}{384}y^4 + o(y^4)\right) = 1 - \frac{\pi^2}{8}y^2 + \frac{\pi^4}{384}y^4 + o(y^4) - \Big(-\frac{\pi^2}{8}y^2 + \frac{\pi^4}{384}y^4 + o(y^4)\Big) + \frac{1}{2}\Big(-\frac{\pi^2}{8}y^2 + \frac{\pi^4}{384}y^4 + o(y^4)\Big)^2 = 1 + \frac{\pi^4}{128}y^4 + o(y^4) = 1 + \frac{\pi^4}{128}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$

(11) Si ha $f(x) = \left(1 - x^2 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)\right)^{1/4} - \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{4}{45}x^6 + o(x^6)\right) = 1 - \frac{1}{4}\Big(-x^2 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)\Big) - \frac{3}{32}\Big(-x^2 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)\Big)^2 - \frac{7}{128}\Big(-x^2 + \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)\Big)^3 + o(x^6) - 1 + 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{45}x^6 + o(x^6) = 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{24}x^6 - \frac{3}{32}x^4 - \frac{7}{128}x^6 - 1 + 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{4}{45}x^6 + o(x^6) = \frac{7}{4}x^2 - \frac{73}{96}x^4 + \frac{437}{5760}x^6 + o(x^6)$.

(12) Posto $y = x-1$, si ha $f(x) = f(y+1) = \exp\left(y\log(y+1)\right) = \exp\left(y\left(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + o(y^3)\right)\right) = \exp\left(y^2 - \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{3}y^4 + o(y^4)\right) = 1 + \left(y^2 - \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{3}y^4 + o(y^4)\right) + \frac{1}{2}\left(y^2 - \frac{1}{2}y^3 + \frac{1}{3}y^4 + o(y^4)\right)^2 + o(y^4) = 1 + y^2 - \frac{1}{2}y^3 + \frac{5}{6}y^4 + o(y^4) = 1 + (x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3 + \frac{5}{6}(x-1)^4 + o((x-1)^4)$.

(13) Si ha $g(x) := \sin(2x) - 2\log(1+x) = \left(2x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + o(x^7)\right) - 2\Big(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^6)\Big) = x^2 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)$, per cui $f(x) = 3\cos\left(g(x)\right) = 3\cos\left(x^2 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)\right) = 3 - \frac{3}{2}\left(x^2 - 2x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6)\right)^2 + o(x^7) = 3 - \frac{3}{2}x^4 + 6x^5 - \frac{15}{2}x^6 + o(x^6)$.

(14) Si ha $g(x) := x^2\log(1+x+x^2) = x^2\Big(x + x^2 - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + \frac{1}{3}(x+x^2)^3 + o(x^3)\Big) = x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + o(x^5)$, per cui $f(x) = \exp\left(g(x)\right) - x\sin x = \exp\left(x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + o(x^5)\right) - x\Big(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\Big) = 1 + \left(x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + o(x^5)\right) + o(x^5) - x^2 + \frac{1}{6}x^4 + o(x^5) = 1 - x^2 + x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + o(x^5)$.

(15) Si ha $g(x) := x\sin x = x\Big(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)\Big) = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{120}x^6 + o(x^6)$, per cui $f(x) = \frac{1}{1+g(x)} = 1 - g(x) + g(x)^2 - g(x)^3 + o(x^6) = 1 - \Big(x^2 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{120}x^6 + o(x^6)\Big) + \Big(x^2 - \frac{1}{6}x^4 + o(x^4)\Big)^2 -$

$\Big(x^2+o(x^2)\Big)^3+o(x^6) = 1-x^2+\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{120}x^6+x^4-\frac{1}{3}x^6-x^6+o(x^6) = 1-x^2+\frac{7}{6}x^4-\frac{161}{120}x^6+o(x^6)$.

(16) Si ha $g(x) := \cosh x - 1 = \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6+o(x^6)$, per cui $f(x) = \frac{1}{1+g(x)} = 1-g(x)+g(x)^2-g(x)^3+o(x^6) = 1-\Big(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6+o(x^6)\Big)+\Big(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)\Big)^2-\Big(\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\Big)^3+o(x^6) = 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{24}x^6-\frac{1}{8}x^6+o(x^6) = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{24}x^4-\frac{61}{720}x^6+o(x^6)$.

(17) Si ha $f(x) = \Big(1+\frac{1}{2}(x-x^2)^2+\frac{1}{6}(x-x^2)^4+o(x^5)\Big)-\Big(-x^2-\frac{1}{2}x^4+o(x^5)\Big) = 1+\frac{1}{2}x^2-x^3+\frac{13}{24}x^4-\frac{1}{6}x^5+o(x^5)+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^5) = 1+\frac{3}{2}x^2-x^3+\frac{25}{24}x^4-\frac{1}{6}x^5+o(x^5)$.

(18) Posto $g(x) := x\sinh x = x\Big(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\Big) = x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{120}x^6+o(x^6)$, si ha $f(x) = \log(1+g(x)) = \log\Big(1+x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{120}x^6+o(x^6)\Big) = x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{120}x^6+o(x^6)-\frac{1}{2}\Big(x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{120}x^6+o(x^6)\Big)^2+\frac{1}{3}\Big(x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{120}x^6+o(x^6)\Big)^3+o(x^6) = x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{120}x^6-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{3}x^6+o(x^6) = x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{7}{40}x^6+o(x^6)$.

□

Svolgimento esercizio 8

(1) Si ha $f(x) = \dfrac{1-x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)-\big(1-\frac{1}{2}\cdot 2x^2+\frac{1}{4!}\cdot 4x^4+o(x^4)\big)}{x^4(1+o(1))} = \dfrac{\frac{1}{3}x^4(1+o(1))}{x^4(1+o(1))} \to \dfrac{1}{3}$.

(2) Si ha $f(x) = \dfrac{1-\frac{1}{2}\cdot 2x^4+\frac{1}{4!}\cdot 4x^8+o(x^8)-\big(1-x^4+\frac{1}{2}x^8+o(x^8)\big)}{x^8(1+o(1))} = \dfrac{-\frac{1}{3}x^8(1+o(1))}{x^8(1+o(1))} \to -\dfrac{1}{3}$.

(3) Si ha $f(x) = \dfrac{x^2-\big(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\big)^2}{x^3\big(1+x+o(x)-1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\big)} = \dfrac{\frac{1}{3}x^4(1+o(1))}{x^4(1+o(1))} \to \dfrac{1}{3}$.

(4) Si ha $f(x) = \dfrac{x^2\big(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-x\big)}{\big(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\big)^3-x^3} = \dfrac{\frac{1}{6}x^5(1+o(1))}{-\frac{1}{2}x^5(1+o(1))} \to -\dfrac{1}{3}$.

(5) Si ha $f(x) = \dfrac{\big(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\big)^2-\big(x^2-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)\big)}{x^2-x\big(x+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\big)} = \dfrac{x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)-x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{6}x^4(1+o(1))} = \dfrac{\frac{1}{6}x^4(1+o(1))}{-\frac{1}{6}x^4(1+o(1))} \to -1$.

(6) Si ha $f(x) = \dfrac{x^3-\frac{1}{2}x^6+o(x^6)-\big(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\big)^3}{x^5(1+o(1))} = \dfrac{x^3+o(x^5)-x^3+\frac{1}{2}x^5+o(x^5)}{x^5(1+o(1))} \to \dfrac{1}{2}$.

(7) Si ha $f(x) = \dfrac{1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4)-1-x\big(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\big)}{x^2(1+o(1))\cdot x(1+o(1))} = \dfrac{\frac{1}{2}x^3(1+o(1))}{x^3(1+o(1))} \to \dfrac{1}{2}$.

(8) Si ha

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2 - \frac{1}{6}x^6 + o(x^6) - \big(x - \frac{1}{2}x\frac{\sqrt{1+x^2}-\cosh(x)}{(e^{x^2}-\cos x)^2}^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\big)^2 - x^3}{x^4(1+o(1))} \\
&= \frac{x^2 - x^3 + o(x^5) - x^2 + x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4(1+o(1))} = \frac{-\frac{11}{12}x^4(1+o(1))}{x^4(1+o(1))} \to -\frac{11}{12}.
\end{aligned}
$$

(9) Si ha $f(x) = \dfrac{6x - \frac{1}{6}\cdot(6x)^3 + \frac{1}{5!}\cdot(6x)^5 + o(x^5) - 6x\big(1 - 6x^2 + \frac{1}{2}\cdot 36x^4 + o(x^4)\big)}{x^5(1+o(1))} = \dfrac{-\frac{216}{5}x^5(1+o(1))}{x^5(1+o(1))} \to -\dfrac{216}{5}$.

(10) Si ha $f(x) = \dfrac{x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - x}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} - 1} = \dfrac{-\frac{1}{2}x^2(1+o(1))}{1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2) - 1} \to 2$.

(11) Si ha $f(x) = \dfrac{\operatorname{arctg}\big(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\big) - x^2}{x^4} = \dfrac{x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4) - \frac{1}{6}\big(x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)\big)^3 - x^2}{x^4} = \dfrac{-\frac{1}{2}x^4(1+o(1))}{x^4} \to -\dfrac{1}{2}$.

(12) Si ha $f(x) = \dfrac{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x - \log\big(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\big)}{x^2(1+o(1))} = \dfrac{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2(1+o(1))} = \dfrac{\frac{1}{2}x^2(1+o(1))}{x^2(1+o(1))} \to \dfrac{1}{2}$.

(13) Si ha

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\big\{\big(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\big)^2 - \log\big(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\big)\big\}\log\big(x + o(x)\big)}{x^2(1+o(1))\cdot 2x(1+o(1))} \\
&= \frac{\big(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\big)\cdot x(1+o(1))}{2x^3(1+o(1))} = \frac{\frac{3}{2}x^2(1+o(1))}{2x^2(1+o(1))} \to \frac{3}{4}.
\end{aligned}
$$

(14) Si ha

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - e^{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}}{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - x} \\
&= \frac{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \big(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\big) - \frac{1}{2}\big(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\big)^2 - \frac{1}{6}\big(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)\big)^3 + o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3(1+o(1))} \\
&= \frac{x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3(1+o(1))} = \frac{\frac{1}{6}x^3(1+o(1))}{\frac{1}{3}x^3(1+o(1))} \to \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

(15) Si ha

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 3x^2\log\Big(1 + \frac{1}{x}\Big) - 2x + (x^2 + x)\log\Big(1 - \frac{1}{x}\Big) \\
&= 3x^2\Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})\Big) - 2x + (x^2 + x)\Big(-\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})\Big) \\
&= 3x - \frac{3}{2} + o(1) - 2x - x - 1 - \frac{1}{2} + o(1) \to -3.
\end{aligned}
$$

(16) Si ha

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4\Big(1-\cos\frac{2}{x}-x\log\Big(1+\frac{2}{x^3}\Big)+\frac{3}{x^5}\Big)\\
&= x^4\Big(1-\Big(1-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{3x^4}+o(\frac{1}{x^4})\Big)-x\Big(\frac{2}{x^3}-\frac{2}{x^6}+o(\frac{1}{x^6})\Big)+\frac{3}{x^5}\Big)\\
&= x^4\Big(-\frac{2}{3x^4}+o(\frac{1}{x^4})+\frac{2}{x^5}+o(\frac{1}{x^5})+\frac{3}{x^5}\Big)=-\frac{2}{3}+o(1)\to-\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(17) Posto $y=x-1$, si ha

$$\begin{aligned}
f(1+y) &= \frac{e^{1+y}-4e^{\sqrt{1+y}}+3e^{\sqrt[3]{1+y}}}{\log(1+y)-y}\\
&= \frac{e(1+y+\frac{1}{2}y^2+o(y^2))-4e^{1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2+o(y^2)}+3e^{1+\frac{1}{3}y-\frac{1}{9}y^2+o(y^2)}}{y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)-y}\\
&= \frac{e(1+y+\frac{1}{2}y^2+o(y^2))-4e(1+\frac{1}{2}y-\frac{1}{8}y^2+\frac{1}{8}y^2+o(y^2))+3e(1+\frac{1}{3}y-\frac{1}{9}y^2+\frac{1}{18}y^2+o(y^2))}{-\frac{y^2}{2}(1+o(1))}\\
&= \frac{\frac{e}{3}y^2(1+o(1))}{-\frac{y^2}{2}(1+o(1))}\to-\frac{2}{3}e.
\end{aligned}$$

(18) Posto $y=x-\pi$, si ha

$$\begin{aligned}
f(\pi+y) &= \frac{y^2-8+8\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{y}{2})}{4\cos^2(\frac{\pi}{2}+\frac{y}{2})-y^2}=\frac{y^2-8+8\cos(\frac{y}{2})}{4\sin^2(\frac{y}{2})-y^2}\\
&= \frac{y^2-8+8(1-\frac{y^2}{8}+\frac{y^4}{16\cdot 24}+o(y^4))}{4(\frac{y}{2}-\frac{y^3}{48}+o(y^3))^2-y^2}=\frac{\frac{y^4}{48}(1+o(1))}{-\frac{y^4}{12}(1+o(1))}\to-\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

(19) Si ha

$$f(x)=\frac{\log(1+x^2)-\sinh(x^2)}{x^2(\operatorname{arctg}x)^2}=\frac{\big(x^2-\frac{1}{2}x^4+o(x^5)\big)-\big(x^2-o(x^5)\big)}{x^4(1+o(1))}\to-\frac{1}{2}.$$

(20) Si ha

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\log(1+x^2)-x\sinh(x)+\frac{2}{3}x^4}{(\operatorname{arctg}x-x)^2}=\frac{\big(x^2-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^6+o(x^7)\big)-x\big(x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+o(x^6)\big)+\frac{2}{3}x^4}{\big(-\frac{1}{3}x^3(1+o(1))\big)^2}\\
&= \frac{\frac{13}{40}x^6(1+o(1))}{\frac{1}{9}x^6(1+o(1))}\to\frac{117}{40}.
\end{aligned}$$

(21) Si ha

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sqrt{1+x^2}-\cosh(x)}{(e^{x^2}-\cos x)^2}=\frac{\big(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^5)\big)-\big(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^5)\big)}{\big(1+x^2+o(x^3)-1+\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\big)\big)^2}\\
&= \frac{-\frac{1}{6}x^4(1+o(1))}{\frac{9}{4}x^4(1+o(1))}\to-\frac{2}{27}.
\end{aligned}$$

□

Svolgimento esercizio 9

(1) Si ha

$$\begin{aligned}
a_n &= \big(\sqrt{n^2+n}-n\big)\Big(3n^2\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)-2n+(n^2+n)\log\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big)\\
&= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\Big(3n^2\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)-2n+(n^2+n)\Big(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{2}(1+o(1))\Big(3n-\frac{3}{2}+o(1)-2n-n-1-\frac{1}{2}+o(1)\Big)=\frac{1}{2}(-3+o(1))\to-\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

(2) Si ha

$$\begin{aligned}
a_n &= n^4\Big(1-\cos\frac{2}{n}-n\log\Big(1+\frac{2}{n^3}\Big)+\frac{3}{n^5}\Big)\\
&= n^4\Big(1-1+\frac{4}{2n^2}-\frac{16}{24n^4}+o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)-n\Big(\frac{2}{n^3}-\frac{4}{2n^6}+o\Big(\frac{1}{n^6}\Big)\Big)+\frac{3}{n^5}\Big)\\
&= n^4\Big(-\frac{2}{3n^4}(1+o(1))\Big)\to-\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

(3) Si ha

$$\begin{aligned}
a_n &= n^3\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}-n^3-n=n^3\exp\Big(\frac{1}{n}\log\frac{n+1}{n}\Big)-n^3-n=n^3\exp\Big[\frac{1}{n}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big]-n^3-n\\
&= n^3\Big[1+\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^2+o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\Big]-n^3-n\\
&= n^3\Big[1+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{2n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big]-n^3-n=n^3+n-\frac{1}{2}+o(1)-n^3-n\to-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(4) Si ha

$$\begin{aligned}
a_n &= n^3\sqrt{\frac{n+1}{n}}-n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{8}n=n^3\exp\Big(\frac{1}{2}\log\frac{n+1}{n}\Big)-n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{8}n\\
&= n^3\exp\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)\Big]-n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{8}n\\
&= n^3\Big[1+\Big(\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^2\\
&\qquad+\frac{1}{6}\Big(\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{6n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)^3+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big]-n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{8}n\\
&= n^3\Big[1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{8n^2}-\frac{1}{8n^3}+\frac{1}{48n^3}+o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big]-n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{8}n\\
&= n^3+\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{8}n+\frac{1}{16}+o(1)-n^3-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{8}n\to\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

(5) Si ha

$$a_n=\frac{(\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\frac{1}{n})(\sin\frac{1}{n}+e^{-n})}{e^{-\frac{1}{2n^2}}-\cos\frac{1}{n}}\overset{(a)}{=}\frac{-\frac{1}{3n^3}(1+o(1))\frac{1}{n}(1+o(1))}{\frac{1}{12n^4}(1+o(1))}\to-4,$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(i) $\operatorname{arctg}\frac{1}{n}-\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3})-\frac{1}{n}=-\frac{1}{3n^3}(1+o(1))$;
(ii) $\sin\frac{1}{n}+e^{-n}=\frac{1}{n}(1+o(1))$;
(iii) $e^{-\frac{1}{2n^2}}-\cos\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{8n^4}+o(\frac{1}{n^4})-1+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{24n^4}+o(\frac{1}{n^4})=\frac{1}{12n^4}(1+o(1))$.

(6) Si ha

$$a_n = \frac{e^{n^2 \log(1+\frac{2}{n})} + e^{\sqrt{n}\log n}}{e^{2n} - e^{n(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\frac{1}{n})\log 3}} = \frac{e^{n^2(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} + e^{\sqrt{n}\log n}}{e^{2n} - e^{n(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))\log 3}} = \frac{e^{2n-2+o(1)}(1+o(1))}{e^{2n}(1+o(1))} \to e^{-2}.$$

(7) Si ha

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n+\sqrt{n})^n + (n+2)^n + 3n!}{(n+4)^n(e^{\sqrt{n+1}} + 2^{\sqrt{n}})} \overset{(a)}{=} \frac{n^n e^{\sqrt{n}} e^{-1/2}(1+o(1)) + n^n e^2(1+o(1)) + 3n!}{n^n e^4 (1+o(1)) e^{\sqrt{n}}(1+o(1))} \\ &= \frac{n^n e^{\sqrt{n}} e^{-1/2}(1+o(1))}{n^n e^4(1+o(1))e^{\sqrt{n}}(1+o(1))} \to e^{-9/2}, \end{aligned}$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(i) $(n+\sqrt{n})^n = n^n\Big(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)^n = n^n \exp\Big\{n\log\Big(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)\Big\} = n^n \exp\Big\{n\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{2n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)\Big\} = n^n e^{\sqrt{n}} e^{-1/2}(1+o(1))$;
(ii) $(n+b)^n = n^n\Big(1+\dfrac{b}{n}\Big)^n = n^n e^b(1+o(1))$;
(iii) $e^{\sqrt{n+1}} + 2^{\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}}\Big(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} + \Big(\dfrac{2}{e}\Big)^{\sqrt{n}}\Big) = e^{\sqrt{n}}\Big\{\exp\Big(\dfrac{1}{2\sqrt{n}}(1+o(1))\Big) + o(1)\Big\} = e^{\sqrt{n}}(1+o(1))$.

(8) Si ha

$$a_n = \frac{n^{n+1}(n^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1)(\sqrt{n+1}+1)}{(n+\log n)^n(1+\log n)} \overset{(a)}{=} \frac{n^{n+1}\frac{\log n}{2\sqrt{n}}(1+o(1))\sqrt{n}(1+o(1))}{n^{n+1}(1+o(1))\log n(1+o(1))} \to \frac{1}{2},$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(i) $n^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1 = \exp\Big(\dfrac{\log n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\Big) - 1 = \dfrac{\log n}{2\sqrt{n}}(1+o(1))$;
(ii) $(n+\log n)^n = n^n \exp\Big(n\log\Big(1+\dfrac{\log n}{n}\Big)\Big) = n^n\exp\Big\{n\Big(\dfrac{\log n}{n} - \dfrac{\log^2 n}{2n^2} + o\Big(\dfrac{\log^2 n}{n^2}\Big)\Big)\Big\} = n^n \exp\big(\log n + o(1)\big) = n^{n+1}(1+o(1))$.

(9) Si ha

$$a_n = \frac{3n! + (en)^n + (5\sqrt[3]{n+2})^n}{\big((n+1)(1+\frac{1}{n})^n + 1\big)^n} \overset{(a)}{=} \frac{e^n n^n(1+o(1))}{n^n e^n e^{\frac{1}{e}+\frac{1}{2}}(1+o(1))} \to e^{-\frac{1}{e}-\frac{1}{2}},$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(i) $\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n + \dfrac{1}{n+1} = \exp\Big(n\log\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)\Big) + \dfrac{1}{n+1} = \exp\Big\{n\Big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big\} = \exp\Big(1 - \dfrac{1}{2n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big) + \dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = e\Big(1-\dfrac{1}{2n}+o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big) + \dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = e + \Big(1-\dfrac{e}{2}\Big)\dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$;
(ii) $\Big((n+1)(1+\dfrac{1}{n})^n + 1\Big)^n = (n+1)^n\Big(\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n + \dfrac{1}{n+1}\Big)^n = n^n\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n \exp\{n\log\Big(e + \Big(1-\dfrac{e}{2}\Big)\dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)\Big\} = n^n e(1+o(1))\exp\{n\Big[1+\log\Big(1+\Big(\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{2}\Big)\dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big)\Big]\Big\} = en^n(1+o(1))\exp\{n\Big[1+\Big(\dfrac{1}{e}-\dfrac{1}{2}\Big)\dfrac{1}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)\Big]\Big\} = en^n e^n e^{\frac{1}{e}-\frac{1}{2}}(1+o(1))$.

(10) Si ha

$$a_n = \frac{(n-\log n+2)^n(n+\log\log n)^n}{(n^2+5\log n)^n-(n^2+2)^n} \overset{(a)}{=} \frac{(1-\frac{\log n-2}{n})^n(1+\frac{\log\log n}{n})^n}{(1+\frac{5\log n}{n^2})^{2n}-(1+\frac{2}{n^2})^n} \overset{(b)}{=} \frac{\frac{e^2\log n}{n}(1+o(1))}{\frac{5\log n}{n}(1+o(1))} \to \frac{e^2}{5},$$

dove in (a) si è diviso numeratore e denominatore per n^{2n}, e in (b) si sono usati i risultati:
(i) $(1-\frac{\log n-2}{n})^n = \exp\big\{n\log\big(1-\frac{\log n-2}{n}\big)\big\} = \exp\big\{n\big(-\frac{\log n-2}{n}-\frac{(\log n-2)^2}{2n^2}+o\big(\frac{(\log n)^2}{n^2}\big)\big)\big\} = \exp\big\{-\log n+2+o(1)\big\} = \frac{e^2}{n}(1+o(1))$;
(ii) $(1+\frac{\log\log n}{n})^n = \exp\big\{n\log\big(1+\frac{\log\log n}{n}\big)\big\} = \exp\big\{n\big(\frac{\log\log n}{n}-\frac{(\log\log n)^2}{2n^2}+o\big(\frac{(\log\log n)^2}{n^2}\big)\big)\big\} = \exp\big\{\log\log n+o(1)\big\} = \log n(1+o(1))$;
(iii) $(1+\frac{5\log n}{n^2})^{2n} = \exp\big\{n\log\big(1+\frac{5\log n}{n^2}\big)\big\} = \exp\big\{n\frac{5\log n}{n^2}(1+o(1))\big\} = 1+\frac{5\log n}{n}(1+o(1))$;
(iv) $(1+\frac{2}{n^2})^n = \exp\big\{n\log\big(1+\frac{2}{n^2}\big)\big\} = \exp\big\{n\frac{2}{n^2}(1+o(1))\big\} = 1+\frac{2}{n}(1+o(1))$.

(11) Si ha

$$a_n = \frac{(2+n^{1/n})^n(\sqrt[3]{\sqrt{n}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{n}+1}\,)}{(1+2\pi^{1/n})^n+(1+\log n)^{\log n}} \overset{(a)}{=} \frac{3^n n^{1/3}(1+o(1))\frac{1}{3n^{1/3}}(1+o(1))}{3^n\pi^{2/3}(1+o(1))} \to \frac{1}{3\pi^{2/3}},$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(i) $(2+n^{1/n})^n = \big(2+\exp(\frac{\log n}{n})\big)^n = \big(3+\frac{\log n}{n}+\frac{(\log n)^2}{2n^2}+o(\frac{(\log n)^2}{n^2})\big)^n = 3^n\exp\big\{n\log\big(1+\frac{\log n}{3n}+\frac{(\log n)^2}{6n^2}+o(\frac{(\log n)^2}{n^2})\big)\big\} = 3^n\exp\big\{n\big(\frac{\log n}{3n}+\frac{(\log n)^2}{6n^2}+o(\frac{(\log n)^2}{n^2})\big)\big\} = 3^n\exp\big\{\frac{1}{3}\log n+o(1)\big\} = 3^n n^{1/3}(1+o(1))$;
(ii) $\sqrt[3]{\sqrt{n}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{n}+1} = n^{1/6}\big(\sqrt[3]{1+\frac{2}{\sqrt{n}}}-\sqrt[3]{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}\,\big) = n^{1/6}\big(1+\frac{2}{3\sqrt{n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}})-1-\frac{1}{3\sqrt{n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}})\big) = \frac{1}{3n^{1/3}}(1+o(1))$;
(iii) $(1+2\pi^{1/n})^n = \big(1+2\exp(\frac{\log\pi}{n})\big)^n = \big(3+\frac{2\log\pi}{n}+o(\frac{1}{n})\big)^n = 3^n\exp\big\{n\log\big(1+\frac{2\log\pi}{3n}+o(\frac{1}{n})\big)\big\} = 3^n\exp\big\{n\big(\frac{2\log\pi}{3n}+o(\frac{1}{n})\big)\big\} = 3^n\exp\big\{\frac{2}{3}\log\pi+o(1)\big\} = 3^n\pi^{2/3}(1+o(1))$;
(iv) $(1+\log n)^{\log n} = \exp\big\{\log n\log\big(1+\log n\big)\big\} = \exp\big(\log n\log\log n(1+o(1))\big) = o(3^n)$.

(12) Si ha

$$a_n = \frac{(2+8^{1/n})^n-2\cdot 3^n}{(3n^{1/n}+\frac{1}{n})^n(\sqrt[n]{n^2+2n}-n^{2/n})} \overset{(a)}{=} \frac{3^n\frac{3(\log 2)^2}{n}(1+o(1))}{n3^n e^{1/3}(1+o(1))\frac{2}{n^2}(1+o(1))} \to \frac{3(\log 2)^2}{2e^{1/3}},$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(i) $(2+8^{1/n})^n-2\cdot 3^n = \big(2+\exp(\frac{\log 8}{n})\big)^n-2\cdot 3^n = \big(3+\frac{3\log 2}{n}+\frac{9(\log 2)^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\big)^n-2\cdot 3^n = 3^n\exp\big\{n\log\big(1+\frac{\log 2}{n}+\frac{3(\log 2)^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\big)\big\}-2\cdot 3^n = 3^n\exp\big\{n\big(\frac{\log 2}{n}+\frac{3(\log 2)^2}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\big)\big\}-2\cdot 3^n = 3^n\exp\big\{\log 2+\frac{3(\log 2)^2}{2n}+o(\frac{1}{n})\big\} = 2\cdot 3^n\big\{\exp\big(\frac{3(\log 2)^2}{2n}(1+o(1))\big)-1\big\} = 3^n\frac{3(\log 2)^2}{n}(1+o(1))$;
(ii) $(3n^{1/n}+\frac{1}{n})^n = 3^n n\big(1+\frac{1}{3n^{1+1/n}}\big)^n = n3^n\exp\big\{n\log\big(1+\frac{1}{3n^{1+1/n}}\big)\big\} = n3^n\exp\big\{\frac{n}{3n^{1+1/n}}(1+o(1))\big)\big\} = n3^n e^{1/3}(1+o(1))$;
(iii) $\sqrt[n]{n^2+2n}-n^{2/n} = n^{2/n}\big(\sqrt[n]{1+\frac{2}{n}}-1\big) = (1+o(1))\big\{\exp\big(\frac{1}{n}\log(1+\frac{2}{n})\big)-1\big\} = (1+o(1))\big\{\exp\big(\frac{2}{n^2}(1+o(1))\big)-1\big\} = \frac{2}{n^2}(1+o(1))$.

(13) Si ha

$$a_n = \frac{\big(e^{3/n^2}-\cos(\frac{1}{2n})\big)^{n^2}}{\big(e^{2/n^2}-\cos(\frac{3}{2n})\big)^{n^2}} \overset{(a)}{=} \frac{\big(\frac{25}{8n^2}\big)^{n^2}\exp\big(\frac{1727}{1200}\big)(1+o(1))}{\big(\frac{25}{8n^2}\big)^{n^2}\exp\big(\frac{687}{1200}\big)(1+o(1))} \to e^{13/15},$$

dove in (a) si sono usati i risultati:
(i) $e^{\alpha/n^2} - \cos(\frac{\beta}{n}) = 1 + \frac{\alpha}{n^2} + \frac{\alpha^2}{2n^4} + o(\frac{1}{n^4}) - 1 + \frac{\beta^2}{2n^2} - \frac{\beta^4}{24n^4} + o(\frac{1}{n^4}) = \frac{2\alpha+\beta^2}{2n^2} + \frac{12\alpha^2-\beta^4}{24n^4} + o(\frac{1}{n^4}) = \frac{2\alpha+\beta^2}{2n^2}\big(1 + \frac{12\alpha^2-\beta^4}{12(2\alpha+\beta^2)n^2} + o(\frac{1}{n^2})\big)$;
(ii) $\big(e^{\alpha/n^2} - \cos(\frac{\beta}{n})\big)^{n^2} = \big(\frac{2\alpha+\beta^2}{2n^2}\big)^{n^2}\big(1+\frac{12\alpha^2-\beta^4}{12(2\alpha+\beta^2)n^2}+o(\frac{1}{n^2})\big)^{n^2} = \big(\frac{2\alpha+\beta^2}{2n^2}\big)^{n^2} \exp\big\{n^2 \log\big(1+\frac{12\alpha^2-\beta^4}{12(2\alpha+\beta^2)n^2}+ o(\frac{1}{n^2})\big)\big\} = \big(\frac{2\alpha+\beta^2}{2n^2}\big)^{n^2} \exp\big\{n^2\big(\frac{12\alpha^2-\beta^4}{12(2\alpha+\beta^2)n^2} + o(\frac{1}{n^2})\big)\big\} = \big(\frac{2\alpha+\beta^2}{2n^2}\big)^{n^2} \exp\big(\frac{12\alpha^2-\beta^4}{12(2\alpha+\beta^2)}\big)(1 + o(1)).$ $\square$

Analisi Matematica I
Integrali e integrali impropri

Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali indefiniti

(1) $\int e^x\left(\frac{1}{2}x^2+x\right)dx$

(2) $\displaystyle\int (x-4)^2\sin x\,dx$

(3) $\int x^4\cos x\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$

(5) $\int x\sqrt{1+4x^2}\,dx$

(6) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^7 x\,dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$

(8) $\int \cos^4 x\,dx$.

(9) $\int \cos^2 x(\cos x+\sin x)^2\,dx$.

(10) $\int x(\sin 2x-\sin x)\,dx$

(11) $\int e^{2\sqrt{t}}\,dt$

(12) $\displaystyle\int e^{1-\sqrt[3]{x}}\,dx$

(13) $\displaystyle\int \frac{\log\log x}{x}\,dx$

(14) $\displaystyle\int \arcsin(\sqrt{x})\,dx$

(15) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\,dx$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti integrali indefiniti

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x(x^2+1)}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x(x^2-1)}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x(x-1)(x-2)}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2}\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{2x^4+3}{x(x+1)^2}\,dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+1}{x(x^2-1)^2}\,dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^2+2x+2}\,dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)}\,dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$

(11) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+x+1}\,dx$

(12) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+x+1)}\,dx$

(13) $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+2}{(x^2+1)(x^2-x)}\,dx$

(14) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx$

(15) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$

(16) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(x^2+1)^2}\,dx$

Esercizio 3. Calcolare i seguenti integrali indefiniti

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x+1}{2x(x-3\sqrt{x}+2)}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}+3}{x+2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{x+2\sqrt{x-1}+2}\,dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}+9}\,dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x \sinh x}\,dx$

(7) $\displaystyle\int (x^2+1)\log(x+1)\,dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x}{4\cos^2 x + \sin^2 x}\, dx$

(10) $\displaystyle\int x\sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx$

(11) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\, dx$

(12) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}\, dx$

(13) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\, dx$

(14) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+1}\, dx$

(15) $\displaystyle\int x^2\sqrt{9-x^2}\, dx$

Esercizio 4. Calcolare i seguenti integrali definiti

(1) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{|\sin x|}{\cos x}\, dx$

(2) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^3 x\, dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} |\sin x|^3\, dx$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/3} \frac{1}{1-\sin x}\, dx$

(5) $\displaystyle\int_{0}^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg} x}{1+\sin^2 x}\, dx$

(6) $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1-\cos x}}\, dx$

(7) $\displaystyle\int_{0}^{1} e^x \log(4+e^{2x})\, dx$

(8) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{x-\sqrt{3x+4}}\, dx$

(9) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\log(x^2-x+1)}{(x+1)^2}\, dx$

(10) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{(2\log x+1)\operatorname{arctg}(\log x)}{x}\, dx$

(11) $\displaystyle\int_{0}^{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}\right) dx$

(12) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\sqrt{1+4\cos^2 x}\,dx$

Esercizio 5. Calcolare i seguenti integrali impropri

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+\sqrt{x}\,)}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x}\,)^2}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x-1}\,)}{\sqrt{x-1}(x+2\sqrt{x-1}\,)}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}(x+\sqrt{e^x-1}\,)\,dx$

(5) $\displaystyle\int_0^\infty x(1-\cos x)e^{-x}\,dx$

(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\log(\sin x)}{\cos^2 x}\,dx$

(8) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{(x-1)^{3/2}}\,dx$

(9) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\log x}{(x-1)^{4/3}}\,dx$

Esercizio 6. Discutere l'integrabilità in senso improprio dei seguenti integrali

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(x+1)}{x^3+2x+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(2+x^2)}{\sqrt{x}\,\operatorname{arctg}(x^2)}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{|x-1|^{5/4}\sin(x^{1/2})}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x^2)}{x^{1/2}\arcsin(|x-1|^{9/4})}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)\log(1+\sqrt{x})}\,dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2x}+\operatorname{arctg}(x^{1/4})}\,dx$

(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{x}}}{(x-1)^{1/2}}\,dx$

(8) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(x-4)^2(x+\frac{1}{2})^{1/3}}\,dx$

(9) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(x-3)^{1/3}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}}\,dx$

(10) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{(x-3)^{1/3}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}}\,dx$

(11) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{|x-3|^{3/4}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}}\,dx$

(12) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{\log(3+|x|^{-1/4})}{|x-3|^{3/4}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}}\,dx$

(13) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,dx$

Esercizio 7. Trovare i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ per cui risultano convergenti i seguenti integrali impropri

(1) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(x+2)^\beta}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{(\log(1+\frac{1}{x}))^\beta}{\sqrt{x}+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x+7)}{x(\log(x+2))^\beta}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{x^3}\right)^\beta x^{\beta/2}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{|\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}|^\beta}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

(6) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{(e^x-1)^\beta}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$

(7) $\displaystyle\int_{1}^{\infty} \frac{\log x}{(x-1)^\beta}\,dx$

(8) $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x^2+3)}{(x+1)^\beta(x+2)}\,dx$

(9) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)^\beta\,dx$

(10) $\displaystyle\int_{3}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{(x-3)^\beta\sqrt{x}}\,dx$

(11) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} (\operatorname{arctg} x)^\beta(\sqrt{x}+3)^{2\beta}\,dx$

(12) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\cos^2 x+3}{x^\beta+\sqrt{x}}\,dx$

(13) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(e^{-x} + \frac{x^{2\beta}+1}{\sqrt{x}} \right) dx$

(14) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(\frac{1}{x^\beta})}{2+\sqrt{x}}\, dx$

(15) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin \frac{1}{\sqrt{x}}|^\beta}{\sqrt{x}\log(1+\sqrt[3]{x})}\, dx, \qquad \beta \geq 0$

(16) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x(1-\cos x)e^{-x}}{\operatorname{arctg}(x^\beta)}\, dx$

(17) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x+\sin(x^\beta)}{e^x - \cos(x^\beta)}\, dx, \qquad \beta \geq 0$

Esercizio 8. Trovare i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ per cui risultano convergenti i seguenti integrali impropri. Calcolare, poi, i medesimi integrali per il valore di β indicato.

(1) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{x^\beta(x-2)}\, dx, \quad \beta = 1,$

(2) $\displaystyle\int_1^{\infty} \left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{(x-1)^2} \right)^\beta \frac{1}{x\sqrt[3]{x-1}}\, dx, \quad \beta = 0,$

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x(x^2+2)}\, e^{\beta x^2}\, dx, \quad \beta = 0,$

(4) $\displaystyle\int_0^{\infty} \log(1+x^\beta) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+3)^2} \right) dx, \quad \beta = 2,$

(5) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}(x+7x^\beta)}\, dx, \quad \beta = 0,$

Analisi Matematica I
Integrali e integrali impropri (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Si ha $\int e^x\big(\frac{1}{2}x^2+x\big)\,dx = e^x\big(\frac{1}{2}x^2+x\big) - \int e^x\big(x+1\big)\,dx = e^x\big(\frac{1}{2}x^2+x\big) - e^x\big(x+1\big) + \int e^x\,dx = \frac{1}{2}x^2e^x + C$.

(2) Si ha $\int (x-4)^2\sin x\,dx \overset{(a)}{=} -(x-4)^2\cos x + \int 2(x-4)\cos x\,dx \overset{(b)}{=} -(x-4)^2\cos x + 2(x-4)\sin x - \int 2\sin x\,dx = -(x-4)^2\cos x + 2(x-4)\sin x + 2\cos x + C$, dove si è usata l'integrazione per parti, in (a) con $\begin{cases} f(x)=(x-4)^2, & f'(x)=2(x-4),\\ g'(x)=\sin x, & g(x)=-\cos x,\end{cases}$ e in (b) con $\begin{cases} f(x)=2(x-4), & f'(x)=2,\\ g'(x)=\cos x, & g(x)=\sin x,\end{cases}$

(3) Si ha $\int x^4\cos x\,dx = x^4\sin x - 4\int x^3\sin x\,dx = x^4\sin x + 4x^3\cos x - 12\int x^2\cos x\,dx = x^4\sin x + 4x^3\cos x - 12x^2\sin x + 24\int x\sin x\,dx = x^4\sin x + 4x^3\cos x - 12x^2\sin x - 24x\cos x + 24\sin x + C$.

(4) Si ha $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+1}} \overset{(a)}{=} \int \frac{1}{2}z^{-1/3}\,dz = \frac{3}{4}z^{2/3} = \frac{3}{4}(2x+1)^{2/3} + C$, dove in (a) si è usato il cambiamento di variabili $z = 2x+1 \implies dz = 2dx$.

(5) Si ha $\int x\sqrt{1+4x^2}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{1}{8}\sqrt{z}\,dz = \frac{1}{12}z^{3/2} = \frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2} + C$, dove in (a) si è usato il cambiamento di variabili $z = 1+4x^2 \implies dz = 8x\,dx$.

(6) Si ha $\int \sin^2 x\cos^7 x\,dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)^3\,\cos x\,dx \overset{(a)}{=} \int y^2(1-y^2)^3\,dy = \frac{1}{3}\,y^3 - \frac{3}{5}\,y^5 + \frac{3}{7}\,y^7 - \frac{1}{9}\,y^9 + C = \frac{1}{3}\,\sin^3 x - \frac{3}{5}\,\sin^5 x + \frac{3}{7}\,\sin^7 x - \frac{1}{9}\,\sin^9 x + C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\sin x = y \implies \cos x\,dx = dy$.

(7) Si ha $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x\,dx \overset{(a)}{=} -\int \frac{1-y^2}{y^2}\,dy = y + \frac{1}{y} + C = \cos x + \frac{1}{\cos x} + C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\cos x = y \implies -\sin x\,dx = dy$.

(8) Si ha $\int \cos^4 x\,dx \overset{(a)}{=} \frac{1}{4}\int \big(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\big)\,dx = \frac{1}{4}\big(\frac{3}{2}x+\sin 2x+\frac{1}{8}\sin 4x\big)+C$, dove in (a) si è usato il risultato $\cos^4 x = \frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x) = \frac{1}{4}\big(1+2\cos 2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x\big) = \frac{1}{4}\big(\frac{3}{2}+2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\big)$.

(9) Si ha $\int \cos^2 x(\cos x+\sin x)^2\,dx = \int \cos^2 x\big(1+2\cos x\sin x\big)\,dx = \int \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx + 2\int \cos^3 x\sin x\,dx \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\sin(2x) - 2\int z^3\,dz = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{2}\cos^4 x + C$, dove in (a) si è eseguita la sostituzione $z = \cos x \implies dz = -\sin x\,dx$.

(10) Si ha $\int x(\sin 2x - \sin x)\,dx \overset{(a)}{=} \frac{1}{4}\int z\sin z\,dz - \int x\sin x\,dx \overset{(b)}{=} \frac{1}{4}(\sin z - z\cos z) - (\sin x - x\cos x) = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x - \sin x + x\cos x$, dove in (a) si è usata la sostituzione $z = 2x$ (nel primo integrale), e in (b) si è usato il risultato $\int t\sin t\,dt = -t\cos t + \int \cos t\,dt = -t\cos t + \sin t$.

(11) Si ha $\int e^{2\sqrt{t}}\,dt \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}\int ze^z\,dz = \frac{1}{2}(z-1)e^z = \frac{1}{2}(2\sqrt{t}-1)e^{2\sqrt{t}}$, dove in (a) si è usato il cambiamento di variabili $z = 2\sqrt{t} \implies t = \frac{1}{4}z^2$, $dt = \frac{1}{2}z\,dz$.

(12) Si ha $\int e^{1-\sqrt[3]{x}}\,dx \overset{(a)}{=} -3\int (y-1)^2e^y\,dy \overset{(b)}{=} -3(y-1)^2e^y + 6\int (y-1)e^y\,dy = -3(y-1)^2e^y + 6(y-1)e^y - \int 6e^y + C = -3(y-1)^2e^y + 6(y-1)e^y - 6e^y + C = -3e^{1-\sqrt[3]{x}}(x^{2/3} + 2x^{1/3} + 2) + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $1-\sqrt[3]{x} = y \implies x = (1-y)^3, dx = -3(1-y)^2\,dy$, in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y)=(y-1)^2, & f'(y)=2(y-1),\\ g'(y)=e^y, & g(y)=e^y,\end{cases}$ e in (c) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y)=y-1, & f'(y)=1,\\ g'(y)=e^y, & g(y)=e^y.\end{cases}$

(13) Si ha $\int \frac{\log\log x}{x}\,dx \overset{(a)}{=} \int \log y\,dy \overset{(b)}{=} y(\log y - 1) + C = \log x(\log\log x - 1) + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\log x = y \implies \frac{dx}{x} = dy$, in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y) = \log y, & f'(y) = \frac{1}{y}, \\ g'(y) = 1, & g(y) = y. \end{cases}$

(14) Si ha $\int \arcsin\sqrt{x}\,dx \overset{(a)}{=} \int 2y\arcsin y\,dy \overset{(b)}{=} y^2\arcsin y - \int \frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,dy \overset{(c)}{=} y^2\arcsin y - \int \sin^2 z\,dz = y^2\arcsin y - \frac{1}{2}\int(1-\cos 2z)\,dz = y^2\arcsin y - \frac{1}{2}\,z + \frac{1}{4}\,\sin 2z + C = y^2\arcsin y - \frac{1}{2}\,\arcsin y + \frac{1}{2}\,y\sqrt{1-y^2} + C = \left(x - \frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x(1-x)} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x} = y \implies dx = 2y\,dy$, in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y) = \arcsin y, & f'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \\ g'(y) = 2y, & g(y) = y^2, \end{cases}$ e in (c) la sostituzione $y = \sin z \implies dy = \cos z\,dz$.

(15) Si ha $\int \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{2y}{\cos^2 y}\,dy \overset{(b)}{=} 2y\,\mathrm{tg}\,y - \int 2\,\mathrm{tg}\,y\,dy = 2y\,\mathrm{tg}\,y - 2\int \frac{\sin y}{\cos y}\,dy = 2y\,\mathrm{tg}\,y + 2\log|\cos y| + C = 2\sqrt{x}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{x} + 2\log|\cos\sqrt{x}| + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x} = y \implies dx = 2y\,dy$, in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y) = 2y, & f'(y) = 2, \\ g'(y) = \frac{1}{\cos^2 y}, & g(y) = \mathrm{tg}\,y. \end{cases}$

$\square$

Svolgimento esercizio 2

(1) Si ha $\int \frac{2x+1}{x(x^2+1)}\,dx \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}\right)dx = \log|x| - \frac{1}{2}\,\log(x^2+1) + 2\,\mathrm{arctg}\,x + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x-2}{x^2+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+1} + \frac{2}{x^2+1}$.

(2) Si ha $\int \frac{2x+1}{x(x^2-1)}\,dx \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{3}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{3}{2}\,\log|x-1| - \log|x| - \frac{1}{2}\,\log|x+1| + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{2x+1}{x(x^2-1)} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}$.

(3) Si ha $\int \frac{x-3}{x(x-1)(x-2)}\,dx \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{2}{x-1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-2}\right)dx = 2\log|x-1| - \frac{3}{2}\,\log|x| - \frac{1}{2}\,\log|x-2| + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{x-3}{x(x-1)(x-2)} = \frac{2}{x-1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-2}$.

(4) Si ha $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^2}\,dx \overset{(a)}{=} \int \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\right)dx = x + \log|x| + \log|x-1| - \frac{2}{x-1} + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{x^3+1}{x(x-1)^2} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$.

(5) Si ha $\int \frac{2x^4+3}{x(x+1)^2}\,dx \overset{(a)}{=} \int \left(2x - 4 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x+1} - \frac{5}{(x+1)^2}\right)dx = x^2 - 4x + 3\log|x| + 3\log|x+1| + \frac{5}{x+1} + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{2x^4+3}{x(x+1)^2} = 2x - 4 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x+1} - \frac{5}{(x+1)^2}$.

(6) Si ha $\int \frac{x^2+3x+1}{x(x^2-1)^2}\,dx \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{5}{4}\,\frac{1}{x-1} + \frac{5}{4}\,\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = \log|x| + \frac{1}{4}\,\log|x+1| - \frac{1}{4}\,\frac{1}{x+1} - \frac{5}{4}\,\log|x-1| - \frac{5}{4}\,\frac{1}{x-1} + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{x^2+3x+1}{x(x^2-1)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{5}{4}\,\frac{1}{x-1} + \frac{5}{4}\,\frac{1}{(x-1)^2}$.

(7) Si ha $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \mathrm{arctg}(x+1) + C$.

(8) Si ha $\int \frac{x^4+1}{x^2+2x+2}\,dx \overset{(a)}{=} \int \left(x^2 - 2x + 2 - \frac{3}{x^2+2x+2}\right)dx = \frac{1}{3}\,x^3 - x^2 + 2x - 3\,\mathrm{arctg}(x+1) + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{x^4+1}{x^2+2x+2} = x^2 - 2x + 2 - \frac{3}{x^2+2x+2}$.

(9) Si ha $\int \frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)}\,dx \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{3}{x^2-2x+2}\right) dx = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2-2x+2) + 3\operatorname{arctg}(x-1) + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{3x-2}{(x-1)(x^2-2x+2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{x-4}{x^2-2x+2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{3}{x^2-2x+2}$.

(10) Si ha $\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$.

(11) Si ha $\int \frac{3x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \left(\frac{3}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}\right) dx = \frac{3}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$.

(12) Si ha $\int \frac{dx}{x(x^2+x+1)} \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}\right) dx = \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{1}{x(x^2+x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}$.

(13) Si ha $\int \frac{x^2+5x+2}{(x^2+1)(x^2-x)}\,dx \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{4}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{3}{x^2+1}\right) dx = 4\log|x-1| - 2\log|x| - \log(x^2+1) - 3\operatorname{arctg} x + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{x^2+5x+2}{(x^2+1)(x^2-x)} = \frac{4}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{2x+3}{x^2+1} = \frac{4}{x-1} - \frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2+1} - \frac{3}{x^2+1}$.

(14) Si ha $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+4}\right) dx = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{12}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2+4}$.

(15) Si ha $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}\,dx \overset{(a)}{=} \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{x}{x^2+1}\right) dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + c$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}\right)$.

(16) Si ha $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2}\,dx \overset{(a)}{=} \int \left(-\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{3x^2+2}{x(x^2+1)}\right) dx = -\frac{3}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\frac{3x^2+2}{x(x^2+1)} + c$, dove in (a) si è usata la decomposizione $\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\frac{Dx^2+Ex+F}{x(x^2+1)} = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{3x^2+2}{x(x^2+1)}$.

□

Svolgimento esercizio 3

(1) $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{2y^2}{y+1}\,dy = 2\int \left(y-1+\frac{1}{y+1}\right) dy = y^2 - 2y + 2\log|y+1| + C = x - 2\sqrt{x} + 2\log|\sqrt{x}+1| + C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{x} = y \implies dx = 2y\,dy$.

(2) $\int \frac{x+1}{2x(x-3\sqrt{x}+2)}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{t^2+1}{t(t^2-3t+2)}\,dt = \int \left(\frac{1}{2t} - \frac{2}{t-1} + \frac{5}{2}\frac{1}{t-2}\right) dt = \frac{1}{2}\log t - 2\log|t-1| + \frac{5}{2}\log|t-2| + C = \frac{1}{4}\log x - 2\log|\sqrt{x}-1| + \frac{5}{2}\log|\sqrt{x}-2| + C$, dove in (a) si è eseguita la sostituzione $\sqrt{x} = t \implies dx = 2tdt$.

(3) $\int \frac{\sqrt{x+1}+3}{x+2}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{2(y^2+3y)}{y^2+1}\,dy \overset{(b)}{=} 2\int \left(1 + \frac{3}{2}\frac{2y-1}{y^2+1} - \frac{1}{y^2+1}\right) dy = 2y + 3\log(y^2+1) - 2\operatorname{arctg} y + C = 2\sqrt{x+1} + 3\log|x+2| - 2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x+1} = y \implies dx = 2y\,dy$, e in (b) la decomposizione $\frac{y^2+3y}{y^2+1} = 1 + \frac{3y-1}{y^2+1} = 1 + \frac{3}{2}\frac{2y-1}{y^2+1} - \frac{1}{y^2+1}$.

(4) $\int \frac{\sqrt{x-1}+1}{x+2\sqrt{x-1}+2}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{2(y^2+y)}{y^2+2y+3}\,dy \overset{(b)}{=} 2\int \left(1 - \frac{1}{2}\frac{2y+2}{y^2+2y+3} - \frac{2}{y^2+2y+3}\right) dy = 2y - \log(y^2+2y+3) - 2\int \frac{dy}{\left(\frac{y+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = 2y - \log(y^2+2y+3) - 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{y+1}{\sqrt{2}} + C = 2\sqrt{x-1} - \log\left|x+2\sqrt{x-1}+2\right| - 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{2}} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x-1} = y \implies dx = 2y\,dy$, e in (b) la decomposizione $\frac{y^2+y}{y^2+2y+3} = 1 - \frac{y+3}{y^2+2y+3} = 1 - \frac{1}{2}\frac{2y+2}{y^2+2y+3} - \frac{2}{y^2+2y+3}$.

(5) $\int \frac{1}{e^{2x}+9}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{1}{y(y^2+9)}\,dy \overset{(b)}{=} \frac{1}{9}\int\big(\frac{1}{y}-\frac{y}{y^2+9}\big)\,dy = \frac{1}{9}\log|y|-\frac{1}{18}\log(y^2+9)+C = \frac{1}{9}x-\frac{1}{18}\log(e^{2x}+9)+C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $e^x = y \implies x = \log y, dx = \frac{dy}{y}$, e in (b) la decomposizione $\frac{1}{y(y^2+9)} = \frac{1}{9}\frac{1}{y} - \frac{1}{9}\frac{y}{y^2+9}$.

(6) $\int \frac{1}{e^x \sinh x}\,dx = \int \frac{2}{e^{2x}-1}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{2}{y(y^2-1)}\,dy \overset{(b)}{=} \int\big(-\frac{2}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+1}\big)\,dy = -2\log|y| + \log|y^2-1| + C = -2x + \log|e^{2x}-1| + C = \log|1-e^{-2x}| + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $e^x = y \implies x = \log y, dx = \frac{dy}{y}$, e in (b) la decomposizione $\frac{2}{y(y^2-1)} = -\frac{2}{y}+\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+1}$.

(7) $\int(x^2+1)\log(x+1)\,dx \overset{(a)}{=} \big(\frac{1}{3}x^3+x\big)\log(x+1) - \int\big(\frac{1}{3}x^3+x\big)\frac{1}{x+1}\,dx \overset{(b)}{=} \frac{1}{3}(x^3+3x)\log(x+1) - \frac{1}{3}\int\big(x^2-x+4-\frac{4}{x+1}\big)\,dx = \frac{1}{3}(x^3+3x)\log(x+1) - \frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}\log|x+1|+C$, dove si sono usate in (a) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x) = \log(x+1), & f'(x) = \frac{1}{x+1}, \\ g'(x) = x^2+1, & g(x) = \frac{1}{3}x^3+x, \end{cases}$ e in (b) la decomposizione $\frac{x^3+3x}{x+1} = x^2-x+4-\frac{4}{x+1}$.

(8) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{y^4}{(y^2+1)^2}dy \overset{(b)}{=} \int\big(1-\frac{3}{2}\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{2}\frac{d}{dy}\frac{y}{y^2+1}\big)\,dy = y - \frac{3}{2}\operatorname{arctg} y + \frac{1}{2}\frac{y}{y^2+1} + C = \operatorname{tg} x - \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $y = \operatorname{tg} x \implies \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}, \sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}, dx = \frac{dy}{1+y^2}$, e in (b) la decomposizione $\frac{y^4}{(y^2+1)^2} = 1 - \frac{2y^2+1}{(y^2+1)^2} = 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{2}\frac{d}{dy}\frac{y}{y^2+1}$.

(9) $\int \frac{\cos^2 x}{4\cos^2 x+\sin^2 x}\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{1+3\cos^2 x}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{1}{(y^2+1)(y^2+4)}dy = \frac{1}{3}\int\frac{dy}{y^2+1} - \frac{1}{3}\int\frac{dy}{y^2+4} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} y - \frac{1}{3}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg} x}{2}$, dove in (a) si è usata la sostituzione $y = \operatorname{tg} x \implies \cos^2 x = \frac{1}{1+y^2}, dx = \frac{dy}{1+y^2}$.

(10) $\int x\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{4}{9}(y^2-1)\cdot y\cdot\frac{8}{9}y\,dy = \frac{32}{81}\big(\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{3}y^3\big)+C = \frac{32}{81}\big(\frac{81}{80}x^2+\frac{3}{20}x-\frac{2}{15}\big)\sqrt{1+\frac{9}{4}x}+C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $y = \sqrt{1+\frac{9}{4}x} \implies x = \frac{4}{9}(y^2-1)$, $dx = \frac{8}{9}y\,dy$.

(11) $\int\sqrt{x^2+1}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{y^2+1}{2y}\frac{y^2+1}{2y^2}\,dy = \frac{1}{4}\int\big(y+\frac{2}{y}+\frac{1}{y^3}\big)\,dy = \frac{1}{4}\big(\frac{1}{2}y^2+2\log|y|-\frac{1}{2y^2}\big)+C = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1}\,)+C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{1+x^2} = y-x \implies x = \frac{y^2-1}{2y}$, $dx = \frac{y^2+1}{2y^2}\,dy$, $\sqrt{1+x^2} = \frac{y^2+1}{2y}$.

(12) $\int\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}\,dx = \int\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx \overset{(a)}{=} \int\big(\frac{2t}{t^2-1}\big)^2\frac{t^2+1}{2t}\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = \int\frac{(t^2+1)^2}{t(t^2-1)^2}\,dt = \int\big(\frac{1}{t}+\frac{1}{(t-1)^2}-\frac{1}{(t+1)^2}\big)\,dt = \log|t| - \frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}+C = \ldots = \log(x+\sqrt{x^2+1}\,) - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C$, dove in (a) si è eseguito il cambiamento di variabile $\sqrt{x^2+1} = t-x \implies x = \frac{t^2-1}{2t}$, $dx = \frac{t^2+1}{2t^2}\,dt$, $\sqrt{x^2+1} = \frac{t^2+1}{2t}$.

(13) $\int\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\,dx \overset{(a)}{=} \int\frac{z^2-1}{2z}\frac{1}{\frac{z^2+1}{2z}+1}\frac{z^2-1}{2z^2}\,dz = \frac{1}{2}\int\frac{(z-1)^2}{z^2}\,dz = \frac{1}{2}\int\big(1-\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}\big)\,dz = \frac{1}{2}z - \log|z| - \frac{1}{2z}+C = \sqrt{x^2-1}-\log(x+\sqrt{x^2-1}\,)+C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{x^2-1} = z-x \implies x = \frac{z^2+1}{2z}, dx = \frac{z^2-1}{2z^2}\,dz, \sqrt{x^2-1} = \frac{z^2-1}{2z}$.

(14) $\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2+1}\,dx \overset{(a)}{=} \int\frac{\cos^2 y}{1+\sin^2 y}\,dy = \int\frac{\cos^2 y}{2\sin^2 y+\cos^2 y}\,dy = \int\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 y+1}\,dy \overset{(b)}{=} \int\frac{1}{2z^2+1}\frac{dz}{z^2+1} \overset{(c)}{=} \frac{1}{2}\int\Big(\frac{2}{z^2+\frac{1}{2}}-\frac{2}{z^2+1}\Big)\,dz = 2\int\frac{dz}{(\sqrt{2}z)^2+1} - \operatorname{arctg} z = \sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}z) - \operatorname{arctg} z + C = \sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} y) - y + C = \sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}\arcsin x) - \arcsin x + C \overset{(d)}{=} \sqrt{2}\operatorname{arctg}\Big(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\Big) - \arcsin x + C$, dove si è usata in (a) la sostituzione $x = \sin y \implies dx = \cos y\,dy$, in (b) la sostituzione $y = \operatorname{arctg} z \implies dy = \frac{dz}{z^2+1}$, in (c) la decomposizione $\frac{1}{z^2+\frac{1}{2}}\frac{1}{z^2+1} = \frac{2}{z^2+\frac{1}{2}} - \frac{2}{z^2+1}$, e in (d) la formula $\operatorname{tg}\arcsin x = \frac{\sin\arcsin x}{\sqrt{1-\sin^2\arcsin x}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

(15) $\int x^2\sqrt{9-x^2}\,dx \overset{(a)}{=} \int 9\sin^2 t\cdot 3\cos t\cdot 3\cos t\,dt \overset{(b)}{=} \frac{81}{8}\int(1-\cos 4t)\,dt = \frac{81}{8}\big(t-\frac14\sin 4t\big)+C = \frac{81}{8}\arcsin\frac{x}{3}-\frac{81}{32}\sin\big(4\arcsin\frac{x}{3}\big)+C \overset{(c)}{=} \frac{81}{8}\arcsin\frac{x}{3}-\frac18 x(9-2x^2)\sqrt{9-x^2}+C$, dove in (a) si è eseguita la sostituzione $x=3\sin t \implies dx=3\cos t dt$, in (b) si è usato il risultato $\sin^2 t\cos^2 t = \frac14\sin^2(2t)=\frac18(1-\cos 4t)$, e in (c) i risultati $\sin 4z = 4\sin z\cos z(1-2\sin^2 z)$ e $\sin\big(4\arcsin\frac{x}{3}\big) = 4\frac{x}{3}\big(1-\frac{2x^2}{9}\big)\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}=\frac{4}{81}x(9-2x^2)\sqrt{9-x^2}$.

$\square$

Svolgimento esercizio 4

(1) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{|\sin x|}{\cos x}\,dx = 2\int_0^{\pi/4}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = 2\big[-\log|\cos x|\big]_0^{\pi/4}=\log 2$.

(2) $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos^3 x\,dx = \int_{\pi/2}^{3\pi/2}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx \overset{(a)}{=} -\int_{-1}^{1}(1-y^2)\,dy = \big[\frac13 y^3-y\big]_{-1}^{1} = -\frac43$, dove si è usata in (a) la sostituzione $\sin x = y \implies \cos x\,dx = dy$.

(3) $\int_0^{2\pi}|\sin x|^3\,dx = 2\int_0^{\pi}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx \overset{(a)}{=} 2\int_{-1}^{1}(1-y^2)\,dy = 2\big[y-\frac13 y^3\big]_{-1}^{1}=\frac83$, dove si è usata in (a) la sostituzione $\cos x = y \implies -\sin x\,dx = dy$.

(4) $\int_0^{\pi/3}\frac{1}{1-\sin x}\,dx \overset{(a)}{=} \int_0^{\sqrt3/3}\frac{1}{1-\frac{2y}{1+y^2}}\frac{2\,dy}{1+y^2} = \int_0^{\sqrt3/3}\frac{2\,dy}{(y-1)^2} = \big[-\frac{2}{y-1}\big]_0^{\sqrt3/3} = \frac{6}{3-\sqrt3}-2 = 1+\sqrt3$, dove si è usata in (a) la sostituzione $x = 2\,\mathrm{arctg}\,y \implies \sin x = \frac{2y}{1+y^2}$, $dx=\frac{2\,dy}{1+y^2}$.

(5) $\int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{tg}\,x}{1+\sin^2 x}\,dx \overset{(a)}{=} \int_0^1\frac{y}{1+\frac{y^2}{1+y^2}}\frac{dy}{1+y^2} = \int_0^1\frac{y\,dy}{2y^2+1} = \big[\frac14\log(2y^2+1)\big]_0^1 = \frac14\log 3$, dove si è usata in (a) la sostituzione $x=\mathrm{arctg}\,y \implies \sin^2 x = \frac{y^2}{1+y^2}$, $dx = \frac{dy}{1+y^2}$.

(6) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx \overset{(a)}{=} \int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\frac{y}{\sqrt{1-y}}\,dy \overset{(b)}{=} -2\int_{\sqrt{1-\frac{\sqrt2}{2}}}^{1}(z^2-1)\,dz = -2\Big[\frac13 z^3 - z\Big]_{\sqrt{1-\frac{\sqrt2}{2}}}^{1} = \frac43+\frac23\Big(1-\frac{\sqrt2}{2}\Big)^{3/2}-2\sqrt{1-\frac{\sqrt2}{2}}$, dove si è usata in (a) la sostituzione $\cos x = y \implies -\sin x\,dx = dy$, e in (b) la sostituzione $\sqrt{1-y}=z \implies y = 1-z^2, dy=-2z\,dz$.

(7) $\int_0^1 e^x\log(4+e^{2x})\,dx \overset{(a)}{=} \int_1^e\log(4+t^2)\,dt = \Big[t\log(4+t^2)-\int\frac{2t^2}{4+t^2}\,dt\Big]_1^e \overset{(b)}{=} \Big[t\log(4+t^2)-2t+4\int\frac{d(\frac t2)}{1+(\frac t2)^2}\Big]_1^e = \Big[t\log(4+t^2)-2t+4\,\mathrm{arctg}\Big(\frac t2\Big)\Big]_1^e = e\log(4+e^2)-2e+4\,\mathrm{arctg}\,\frac e2-\log 5+2-4\,\mathrm{arctg}\,\frac12$, dove si è usato: in (a) la sostituzione $t=e^x$; in (b) la decomposizione $\frac{2t^2}{4+t^2}=2-\frac{8}{4+t^2}$.

(8) $\int_{-1}^0\frac{1}{x-\sqrt{3x+4}}\,dx \overset{(a)}{=} \int_1^2\frac{2y}{y^2-3y-4}\,dy \overset{(b)}{=} \frac25\Big[\log|y+1|+4\log|y-4|\Big]_1^2 = \frac65\log\Big(\frac23\Big)$, dove in (a) si è eseguito il cambiamento di variabile $y=\sqrt{3x+4} \implies x=\frac13(y^2-4)$, $dx=\frac23 y\,dy$, e in (b) si è usato il risultato $\int\frac{2y}{y^2-3y-4}\,dy = \frac25\int\big(\frac{1}{y+1}+\frac{4}{y-1}\big)\,dt = \frac25\big(\log|y+1|+4\log|y-4|\big)+C$.

(9) $\int_0^1\frac{\log(x^2-x+1)}{(x+1)^2}\,dx \overset{(a)}{=} \Big[-\frac{1}{x+1}\log(x^2-x+1)\Big]_0^1+\int_0^1\frac{2x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}\,dx \overset{(b)}{=} \Big[-\log|x+1|+\frac12\log(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt3}\,\mathrm{arctg}\,\Big(\frac{2x-1}{\sqrt3}\Big)\Big]_0^1 = -\log 2+\frac{2}{\sqrt3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt3} = \frac{\pi}{3\sqrt3}-\log 2$, dove si è usata in (a) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x)=\log(x^2-x+1), & f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+1},\\ g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}, & g(x)=-\frac{1}{x+1},\end{cases}$ e in (b) il risultato $\int\frac{2x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}\,dx =$

$\int \left(\frac{x}{x^2-x+1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = -\log|x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = -\log|x+1| + \frac{1}{2}\log(x^2 - x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C.$

(10) $\int_1^e \frac{(2\log x+1)\operatorname{arctg}(\log x)}{x}\,dx \overset{(a)}{=} \int_0^1 (2y+1)\operatorname{arctg} y\,dy \overset{(b)}{=} \Big[(y^2+y)\operatorname{arctg} y\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{y^2+y}{y^2+1}\,dy \overset{(c)}{=} \frac{\pi}{2} - \Big[y + \frac{1}{2}\log(y^2+1) - \operatorname{arctg} y\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 1 - \frac{1}{2}\log 2$, dove si è usata in (a) la sostituzione $\log x = y \implies \frac{dx}{x} = dy$, in (b) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y) = \operatorname{arctg} y, & f'(y) = \frac{1}{y^2+1}, \\ g'(y) = 2y+1, & g(y) = y^2+y, \end{cases}$ e in (c) il risultato $\int \frac{y^2+y}{y^2+1}\,dy = \int \left(1 + \frac{y-1}{y^2+1}\right) dy = \int \left(1 + \frac{1}{2}\frac{2y}{y^2+1} - \frac{1}{y^2+1}\right) dy = y + \frac{1}{2}\log(y^2+1) - \operatorname{arctg} y + C.$

(11) $\int_0^3 \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}\right) dx \overset{(a)}{=} \int_0^{\sqrt{3}} 2y \operatorname{arctg}\left(\frac{y+3}{y+1}\right) dy \overset{(b)}{=} \Big[y^2 \operatorname{arctg}\frac{y+3}{y+1}\Big]_0^{\sqrt{3}} + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{y^2}{y^2+4y+5}\,dy \overset{(c)}{=} \pi + \Big[y - 2\log(y^2+4y+5) + 3\operatorname{arctg}(y+2)\Big]_0^{\sqrt{3}} = \pi + \sqrt{3} - 2\log\frac{8+4\sqrt{3}}{5} + 3\operatorname{arctg}(2+\sqrt{3}) - 3\operatorname{arctg}(2)$, dove in (a) si è eseguito il cambiamento di variabile $y = \sqrt{x} \implies x = y^2$, $dx = 2y\,dy$, in (b) si è eseguita l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(y) = \operatorname{arctg}\frac{y+3}{y+1}, & f'(y) = -\frac{1}{y^2+4y+5}, \\ g'(y) = 2y, & g(y) = y^2, \end{cases}$ e in (c) si è usato il risultato $\int \frac{y^2}{y^2+4y+5}\,dy = \int \left(1 - \frac{2(2y+4)}{y^2+4y+5} + \frac{3}{(y+2)^2+1}\right) dy = y - 2\log(y^2+4y+5) + 3\operatorname{arctg}(y+2) + C.$

(12) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^2 x}\sqrt{1+4\cos^2 x}\,dx \overset{(a)}{=} \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1+4y^2}}{y^2}\,dy \overset{(b)}{=} \int_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{5}} \frac{z^2+1}{2z}\frac{16z^2}{(z^2-1)^2}\frac{z^2+1}{4z^2}\,dz = 2\int_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}^{2+\sqrt{5}} \frac{(z^2+1)^2}{z(z^2-1)^2}\,dz \overset{(c)}{=} 2\int_{5+2\sqrt{6}}^{9+4\sqrt{5}} \frac{(t+1)^2}{t(t-1)^2}\,dt \overset{(d)}{=} \Big[\log|t| - \frac{4}{t-1}\Big]_{5+2\sqrt{6}}^{9+4\sqrt{5}} = \log\frac{9+4\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}} - \frac{4}{8+4\sqrt{5}} + \frac{4}{4+2\sqrt{6}} = \ldots = \log\frac{9+4\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}} + \sqrt{6} - \sqrt{5}$, dove in (a) si è eseguito il cambiamento di variabile $y = \cos x \implies dy = -\sin x\,dx$, in (b) si è eseguito il cambiamento di variabile $\sqrt{1+4y^2} = z - 2y \implies y = \frac{z^2-1}{4z}$, $\sqrt{1+4y^2} = \frac{z^2+1}{2z}$, $dy = \frac{z^2+1}{4z^2}\,dz$, in (c) si è eseguito il cambiamento di variabile $t = z^2 \implies dt = 2z\,dz$, e in (d) si è usato il risultato $\int \frac{(t+1)^2}{t(t-1)^2}\,dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{4}{(t-1)^2}\right) dt = \log|t| - \frac{4}{t-1} + C.$

$\square$

Svolgimento esercizio 5

(1) Determiniamo una primitiva $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{2y+1}{y^2+y}\frac{2(y^2+y)}{(2y+1)^2}\,dy = \int \frac{2dy}{2y+1} = \log|2y+1| + C = \log(1+2x+2\sqrt{x^2+x}\,) + C$, dove in (a) si è usata la sostituzione $\sqrt{x^2+x} = y - x \implies x = \frac{y^2}{1+2y}$, $\sqrt{x^2+x} = \frac{y^2+y}{1+2y}$, $dx = \frac{2y^2+2y}{(1+2y)^2}\,dy$.
Allora $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}\,dx = \lim_{c\to 0^+} \left[\log(1+2x+2\sqrt{x^2+x}\,)\right]_c^1 = \log(3+2\sqrt{2}\,) - \lim_{c\to 0^+}\log(1+2c+2\sqrt{c^2+c}\,) = \log(3+2\sqrt{2}\,).$

(2) Determiniamo una primitiva $\int \frac{\log(1+\sqrt{x}\,)}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x}\,)^2}\,dx \overset{(a)}{=} 2\int \frac{\log(1+y)}{(y+2)^2}\,dy \overset{(b)}{=} -2\frac{\log(1+y)}{y+2} + 2\int \frac{1}{(y+1)(y+2)}\,dy \overset{(c)}{=} -2\frac{\log(1+y)}{y+2} + 2\log|y+1| - 2\log|y+2| + C = -2\frac{\log(1+\sqrt{x})}{2+\sqrt{x}} + 2\log\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right) + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x} = y \implies x = y^2$, $dx = 2y\,dy$, in (b) l'integrazione per parti, con $\begin{cases} f(y) = \log(1+y), & f'(y) = \frac{1}{1+y}, \\ g'(y) = \frac{1}{(y+2)^2}, & g(y) = -\frac{1}{y+2}, \end{cases}$ e in (c) la decomposizione $\frac{1}{(y+1)(y+2)} = \frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2}$.

Allora $\int_0^\infty \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})^2}\,dx = \lim\limits_{\omega\to+\infty}\left[-2\frac{\log(1+\sqrt{x})}{2+\sqrt{x}}+2\log\left(\frac{1+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\right)\right]_0^\omega = \lim\limits_{\omega\to+\infty}\left(-2\frac{\log(1+\sqrt{\omega})}{2+\sqrt{\omega}}+2\log\left(\frac{1+\sqrt{\omega}}{2+\sqrt{\omega}}\right)\right)+ 2\log 2 = 2\log 2$.

(3) Determiniamo una primitiva $\int \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}(x+2\sqrt{x-1})}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{\operatorname{arctg} y}{y(y^2+1+2y)}\,2y dy = 2\int \frac{\operatorname{arctg} y}{(y+1)^2}\,dy \overset{(b)}{=} -2\frac{\operatorname{arctg} y}{y+1} + 2\int \frac{1}{(y+1)(y^2+1)}\,dy \overset{(c)}{=} -2\frac{\operatorname{arctg} y}{y+1} + \int\left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{2}\frac{2y}{y^2+1} + \frac{1}{y^2+1}\right)dy = -2\frac{\operatorname{arctg} y}{y+1} + \log|y+1| - \frac{1}{2}\log(y^2+1) + \operatorname{arctg} y + C = -2\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{x-1}} + \log\left(\frac{1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt{x-1} = y \implies x = y^2+1$, $dx = 2y\,dy$, in (b) l'integrazione per parti, con $\begin{cases} f(y) = \operatorname{arctg} y, & f'(y) = \frac{1}{y^2+1}, \\ g'(y) = \frac{1}{(y+1)^2}, & g(y) = -\frac{1}{y+1}, \end{cases}$ e in (c) la decomposizione $\frac{2}{(y+1)(y^2+1)} = \frac{1}{y+1} - \frac{y-1}{y^2+1}$.

Allora $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}(x+2\sqrt{x-1})}\,dx = \lim\limits_{\omega\to+\infty}\left[-2\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}}{1+\sqrt{x-1}} + \log\left(\frac{1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\right]_1^\omega = \lim\limits_{\omega\to+\infty}\left(-2\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\omega-1}}{1+\sqrt{\omega-1}} + \log\left(\frac{1+\sqrt{\omega-1}}{\sqrt{\omega}}\right) + \operatorname{arctg}\sqrt{\omega-1}\right) = \frac{\pi}{2}$.

(4) Determiniamo una primitiva $\int e^{-x}(x+\sqrt{e^x-1}\,)\,dx = \int xe^{-x}\,dx + \int e^{-x/2}\sqrt{1-e^{-x}}\,dx \overset{(a)}{=} -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx - 2\int\sqrt{1-y^2}\,dy \overset{(b)}{=} -(x+1)e^{-x} - 2\int\cos^2 z\,dz = -(x+1)e^{-x} - \int(1+\cos 2z)\,dz = -(x+1)e^{-x} - z - \frac{1}{2}\sin 2z + C = -(x+1)e^{-x} - \arcsin y - y\sqrt{1-y^2} + C = -(x+1)e^{-x} - \arcsin(e^{-x/2}) - e^{-x/2}\sqrt{1-e^{-x}} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $e^{-x/2} = y \implies -\frac{1}{2}e^{-x/2}\,dx = dy$, e l'integrazione per parti, con $\begin{cases} f(x) = x, & f'(x) = 1, \\ g'(x) = e^{-x}, & g(x) = -e^{-x}, \end{cases}$ e in (b) la sostituzione $y = \sin z \implies dy = \cos z\,dz$.

Allora $\int_0^\infty e^{-x}(x+\sqrt{e^x-1}\,)\,dx = \lim\limits_{\omega\to+\infty}\left[-(x+1)e^{-x} - \arcsin(e^{-x/2}) - e^{-x/2}\sqrt{1-e^{-x}}\right]_0^\omega = \lim\limits_{\omega\to+\infty}\left(-(\omega+1)e^{-\omega} - \arcsin(e^{-\omega/2}) - e^{-\omega/2}\sqrt{1-e^{-\omega}}\right) + 1 + \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{\pi}{2}$.

(5) Determiniamo una primitiva: poiché $\int x(1-\cos x)e^{-x}\,dx = \int xe^{-x}\,dx - \int xe^{-x}\cos x\,dx$, calcoliamo $\int xe^{-x}\,dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} + C$, e $\int xe^{-x}\cos x\,dx \overset{(a)}{=} -(x+1)e^{-x}\cos x - \int(x+1)e^{-x}\sin x\,dx \overset{(b)}{=} -(x+1)e^{-x}\cos x + (x+2)e^{-x}\sin x - \int(x+2)e^{-x}\cos x\,dx$, dove si è usata l'integrazione per parti, in (a) con $\begin{cases} f(x) = \cos x, & f'(x) = -\sin x, \\ g'(x) = xe^{-x}, & g(x) = -(x+1)e^{-x}, \end{cases}$ e in (b) con $\begin{cases} f(x) = \sin x, & f'(x) = \cos x, \\ g'(x) = (x+1)e^{-x}, & g(x) = -(x+2)e^{-x}. \end{cases}$ Quindi, $2\int xe^{-x}\cos x\,dx + 2\int e^{-x}\cos x\,dx = -(x+1)e^{-x}\cos x + (x+2)e^{-x}\sin x$, cioè $\int xe^{-x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}(x+2)e^{-x}\sin x - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x\,dx \overset{(c)}{=} \frac{1}{2}(x+2)e^{-x}\sin x - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}\cos x - \frac{1}{2}\,e^{-x}\big(\sin x - \cos x\big) + C = \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}\sin x - \frac{1}{2}xe^{-x}\cos x + C$, dove in (c) si è usato il risultato $\int e^{-x}\cos x\,dx = -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\sin x\,dx = -e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\cos x\,dx \implies \int e^{-x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}\,e^{-x}\big(\sin x - \cos x\big)$. Concludendo, $\int x(1-\cos x)e^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}\sin x + \frac{1}{2}xe^{-x}\cos x + C$.

Allora $\int_0^{+\infty} x(1-\cos x)e^{-x}\,dx = \lim\limits_{\omega\to+\infty}\left[-(x+1)e^{-x} - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x}\sin x + \frac{1}{2}xe^{-x}\cos x\right]_0^\omega = \lim\limits_{\omega\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\omega e^{-\omega}\cos\omega - (\omega+1)e^{-\omega} - \frac{1}{2}(\omega+1)e^{-\omega}\sin\omega + 1\right) = 1$.

(6) Determiniamo una primitiva $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} = \int \frac{2dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \arcsin(2x-1) + C$.

Allora $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \lim\limits_{a\to 0^-}\left[\arcsin(2x-1)\right]_a^{1/2} + \lim\limits_{b\to 1^-}\left[\arcsin(2x-1)\right]_{1/2}^b = \pi$.

(7) Determiniamo una primitiva $\int \frac{\sin x \log(\sin x)}{\cos^2 x}\,dx \overset{(a)}{=} \frac{\log(\sin x)}{\cos x} - \int \frac{dx}{\sin x} = \frac{\log(\sin x)}{\cos x} - \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx \overset{(b)}{=} \frac{\log(\sin x)}{\cos x} - \int \frac{dy}{y^2-1} \overset{(c)}{=} \frac{\log(\sin x)}{\cos x} - \frac{1}{2}\log|y-1| + \frac{1}{2}\log|y+1| + C = \frac{\log(\sin x)}{\cos x} + \frac{1}{2}\log\big(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\big) + C$, dove si sono usate in (a) l'integrazione per parti, con $\begin{cases} f(x) = \log(\sin x), & f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}, \\ g'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}, & g(x) = \frac{1}{\cos x}, \end{cases}$ in (b) la sostituzione $\cos x = y \implies -\sin x\,dx = dy$, e in (c) la decomposizione $\frac{1}{y^2-1} = \frac{1}{2}\big(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}\big)$.
Allora $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \log(\sin x)}{\cos^2 x}\,dx = \lim_{a\to 0^+} \big[\frac{\log(\sin x)}{\cos x} + \frac{1}{2}\log\big(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\big)\big]_a^1 + \lim_{b\to\pi/2^-} \big[\frac{\log(\sin x)}{\cos x} + \frac{1}{2}\log\big(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\big)\big]_1^{\pi/2} =$

$$= \lim_{b\to\pi/2^-} \big(\frac{\log(\sin b)}{\cos b} + \frac{1}{2}\log\big(\frac{1+\cos b}{1-\cos b}\big)\big) - \lim_{a\to 0^+} \big(\frac{\log(\sin a)}{\cos a} + \frac{1}{2}\log\big(\frac{1+\cos a}{1-\cos a}\big)\big) =$$

$$= \lim_{c\to 0^+} \frac{\log(\sin(\frac{\pi}{2}-c))}{\cos(\frac{\pi}{2}-c)} - \lim_{a\to 0^+} \frac{2\log(\sin a) - \cos a \log(1-\cos a)}{2\cos a} - \frac{1}{2}\log 2 =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \frac{\log(\cos a)}{\sin a} - \lim_{a\to 0^+} \frac{2\log a + o(1) - (1+o(a))\log\big(\frac{a^2}{2}(1+o(1))\big)}{2+o(1)} - \frac{1}{2}\log 2 =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \frac{\log(1-\frac{1}{2}a^2+o(a^2))}{a(1+o(1))} - \lim_{a\to 0^+} \frac{2\log a + o(1) - (1+o(a))(2\log a - \log 2 + o(1))}{2+o(1)} - \frac{1}{2}\log 2 =$$

$$= \lim_{a\to 0^+} \frac{-\frac{1}{2}a^2(1+o(1))}{a(1+o(1))} - \lim_{a\to 0^+} \frac{\log 2 + o(1)}{2+o(1)} - \frac{1}{2}\log 2 = -\log 2.$$

(8) Determiniamo una primitiva $\int \frac{\log x}{(x-1)^{3/2}}\,dx \overset{(a)}{=} -\frac{2\log x}{\sqrt{x-1}} + \int \frac{2}{x\sqrt{x-1}}\,dx \overset{(b)}{=} -\frac{2\log x}{\sqrt{x-1}} + \int \frac{4\,dy}{y^2+1} = -\frac{2\log x}{\sqrt{x-1}} + 4\,\mathrm{arctg}\, y + C = -\frac{2\log x}{\sqrt{x-1}} + 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1} + C$, dove si sono usate in (a) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x) = \log x, & f'(x) = \frac{1}{x}, \\ g'(x) = \frac{1}{(x-1)^{3/2}}, & g(x) = -\frac{2}{\sqrt{x-1}}, \end{cases}$ e in (b) la sostituzione $\sqrt{x-1} = y \implies x = y^2+1,\ dx = 2y\,dy$.
Allora $\int_1^\infty \frac{\log x}{(x-1)^{3/2}}\,dx = \lim_{c\to 1^+} \big[-\frac{2\log x}{\sqrt{x-1}} + 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}\big]_c^2 + \lim_{\omega\to+\infty} \big[-\frac{2\log x}{\sqrt{x-1}} + 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}\big]_2^\omega = \lim_{c\to 1^+} \Big(\frac{2\log x}{\sqrt{x-1}} - 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{x-1}\Big) + \lim_{\omega\to+\infty} \Big(-\frac{2\log\omega}{\sqrt{\omega-1}} + 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{\omega-1}\Big) = 2\pi.$

(9) Determiniamo una primitiva $\int \frac{\log x}{(x-1)^{4/3}}\,dx \overset{(a)}{=} -\frac{3\log x}{\sqrt[3]{x-1}} + \int \frac{3}{x\sqrt[3]{x-1}}\,dx \overset{(b)}{=} -\frac{3\log x}{\sqrt[3]{x-1}} + \int \frac{9y\,dy}{y^3+1} \overset{(c)}{=} -\frac{3\log x}{\sqrt[3]{x-1}} + \int \big(-\frac{3}{y+1} + \frac{3}{2}\frac{2y-1}{y^2-y+1} + \frac{9}{2}\frac{1}{y^2-y+1}\big)\,dy + C = -\frac{3\log x}{\sqrt[3]{x-1}} - 3\log|y+1| + \frac{3}{2}\log(y^2-y+1) + 6\int \frac{dy}{1+\big(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\big)^2} + C = -\frac{3\log x}{\sqrt[3]{x-1}} - 3\log|y+1| + \frac{3}{2}\log(y^2-y+1) + = -\frac{3\log x}{\sqrt[3]{x-1}} - 3\log|1+\sqrt[3]{x-1}| + \frac{3}{2}\log\big(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1} + 1\big) + 3\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}} + C$, dove si sono usate in (a) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x) = \log x, & f'(x) = \frac{1}{x}, \\ g'(x) = \frac{1}{(x-1)^{4/3}}, & g(x) = -\frac{3}{\sqrt[3]{x-1}}, \end{cases}$ in (b) la sostituzione $\sqrt[3]{x-1} = y \implies x = y^3+1,\ dx = 3y^2\,dy$, e in (c) la decomposizione $\frac{9y}{y^3+1} = -\frac{3}{y+1} + \frac{3(y+1)}{y^2-y+1} = -\frac{3}{y+1} + \frac{3}{2}\frac{2y-1}{y^2-y+1} + \frac{9}{2}\frac{1}{y^2-y+1}$.
Allora $\int_1^\infty \frac{\log x}{(x-1)^{4/3}}\,dx =$

$$= \lim_{c\to 1^+} \big[-\frac{3\log x}{\sqrt[3]{x-1}} - 3\log|1+\sqrt[3]{x-1}| + \frac{3}{2}\log\big(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1} + 1\big) + 3\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}}\big]_c^2 +$$

$$+ \lim_{\omega\to+\infty} \big[-\frac{3\log x}{\sqrt[3]{x-1}} - 3\log|1+\sqrt[3]{x-1}| + \frac{3}{2}\log\big(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1} + 1\big) + 3\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}}\big]_2^\omega =$$

$$= \lim_{c\to 1^+} \Big(\frac{3\log c}{\sqrt[3]{c-1}} + 3\log|1+\sqrt[3]{c-1}| - \frac{3}{2}\log\big(\sqrt[3]{(c-1)^2} - \sqrt[3]{c-1} + 1\big) - 3\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{c-1}-1}{\sqrt{3}}\Big) +$$

$$+ \lim_{\omega\to+\infty} \Big(-\frac{3\log\omega}{\sqrt[3]{\omega-1}} - 3\log|1+\sqrt[3]{\omega-1}| + \frac{3}{2}\log\big(\sqrt[3]{(\omega-1)^2} - \sqrt[3]{\omega-1} + 1\big) + 3\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}}\Big) =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{2} + \lim_{\omega\to+\infty}\Big(- \frac{3\log\omega}{\sqrt[3]{\omega-1}} + \frac{3}{2}\,\log\frac{\sqrt[3]{(\omega-1)^2} - \sqrt[3]{\omega-1}+1}{(1+\sqrt[3]{\omega-1}\,)^2} + 3\sqrt{3}\,\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{\pi\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}\,\pi}{2} = 2\pi\sqrt{3}.$$

□

Svolgimento esercizio 6

(1) Poiché $f(x) := \frac{\log(x+1)}{x^3+2x+1} = \frac{\log x}{x^3}(1+o(1))$, $x\to+\infty$, ne segue che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

(2) Poiché $f(x) := \frac{\log(2+x^2)}{\sqrt{x}\,\operatorname{arctg}(x^2)} = \frac{2\log x}{\frac{\pi}{2}\sqrt{x}}(1+o(1))$, $x\to+\infty$, ne segue che $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

(3) Sia $f(x) := \frac{\log x}{|x-1|^{5/4}\sin(x^{1/2})}$. Poiché $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}(1+o(1))$, $x\to 0^+$, allora $\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{(x-1)(1+o(1))}{\sin 1\cdot|x-1|^{5/4}(1+o(1))} = -\frac{1}{\sin 1}\,\frac{1}{|x-1|^{1/4}}(1+o(1))$, $x\to 1^-$, allora $\int_{1/2}^1 f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge.

(4) Sia $f(x) := \frac{\log(x^2)}{x^{1/2}\arcsin(|x-1|^{9/4})}$. Poiché $f(x) = \frac{2\log x}{\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{x}}(1+o(1))$, $x\to 0^+$, allora $\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{2(x-1)(1+o(1))}{|x-1|^{9/4}(1+o(1))} = -\frac{2}{|x-1|^{5/4}}(1+o(1))$, $x\to 1^-$, allora $\int_{1/2}^1 f(x)\,dx$ non converge. Ne segue che $\int_0^1 f(x)\,dx$ non converge.

(5) Sia $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x}(x^2+1)\log(1+\sqrt{x})}$. Poiché $f(x) = \frac{1}{x(1+o(1))}$, $x\to 0^+$, allora $\int_0^1 f(x)\,dx$ non converge. Poiché $f(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}\,x^{5/2}\log x(1+o(1))}$, $x\to+\infty$, allora $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

(6) Sia $f(x) := \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2x}+\operatorname{arctg}(x^{1/4})}$. Poiché $f(x) = \frac{1+o(1)}{x^{1/4}(1+o(1))}$, $x\to 0^+$, allora $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2x}(1+o(1))} = o\big(\frac{1}{x^{100}}\big)$, $x\to+\infty$, allora $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

(7) Poiché $f(x) := \frac{\sin\frac{1}{\sqrt{x}}}{(x-1)^{1/2}}$ è tale che $|f(x)| \le \frac{1}{(x-1)^{1/2}}$, $x\to 1^+$, allora $\int_1^2 f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(1+o(1))}{\sqrt{x}(1+o(1))} = \frac{1}{x}(1+o(1))$, $x\to+\infty$, allora $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

(8) Sia $f(x) := \frac{e^{-x}}{(x-4)^2(x+\frac{1}{2})^{1/3}}$. Poiché $f(x) = \frac{\sqrt{e}\,(1+o(1))}{\frac{27}{4}\,(x+\frac{1}{2})^{1/3}(1+o(1))}$, $x\to -\frac{1}{2}$, allora $\int_{-1}^3 f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{e^{-4}\,(1+o(1))}{\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\,(x-4)^2(1+o(1))}$, $x\to 4$, allora $\int_3^5 f(x)\,dx$ non converge. Poiché $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^{7/3}(1+o(1))} = o\big(\frac{1}{x^{100}}\big)$, $x\to+\infty$, allora $\int_5^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

(9) Sia $f(x) := \frac{e^{-x}}{(x-3)^{1/3}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}}$. Poiché $f(x) = \frac{e^{-1/2}\,(1+o(1))}{-\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\,|x-\frac{1}{2}|^{1/2}(1+o(1))}$, $x\to\frac{1}{2}$, allora $\int_{-1}^2 f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{e^{-3}\,(1+o(1))}{\sqrt{\frac{5}{2}}\,(x-3)^{1/3}(1+o(1))}$, $x\to 3$, allora $\int_2^5 f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^{5/6}(1+o(1))} = o\big(\frac{1}{x^{100}}\big)$, $x\to+\infty$, allora $\int_5^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

(10) Sia $f(x) := \frac{1}{(x-3)^{1/3}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}}$. Poiché $f(x) = \frac{1}{-\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\,|x-\frac{1}{2}|^{1/2}(1+o(1))}$, $x\to\frac{1}{2}$, allora $\int_{-1}^2 f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}\,(x-3)^{1/3}(1+o(1))}$, $x\to 3$, allora $\int_2^5 f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{1}{x^{5/6}(1+o(1))}$, $x\to+\infty$, allora $\int_5^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge. Ne segue che $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

(11) Sia $f(x) := \frac{1}{|x-3|^{3/4}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}}$. Poiché $f(x) = \frac{1}{(\frac{5}{2})^{3/4}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}(1+o(1))}$, $x \to \frac{1}{2}$, allora $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2}}\,|x-3|^{3/4}(1+o(1))}$, $x \to 3$, allora $\int_{2}^{5} f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{1}{x^{5/4}(1+o(1))}$, $x \to +\infty$, allora $\int_{5}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

(12) Sia $f(x) := \frac{\log(3+|x|^{-1/4})}{|x-3|^{3/4}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}}$. Poiché $f(x) = \frac{-\frac{1}{4}\log|x|(1+o(1))}{3^{3/4}\frac{1}{\sqrt{2}}(1+o(1))}$, $x \to 0$, allora $\int_{-1}^{1/4} f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{\log(3+\sqrt[4]{2})(1+o(1))}{(\frac{5}{2})^{3/4}|x-\frac{1}{2}|^{1/2}(1+o(1))}$, $x \to \frac{1}{2}$, allora $\int_{1/4}^{2} f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{\log(3+3^{-1/4})(1+o(1))}{\sqrt{\frac{5}{2}}\,|x-3|^{3/4}(1+o(1))}$, $x \to 3$, allora $\int_{2}^{5} f(x)\,dx$ converge. Poiché $f(x) = \frac{\log 3(1+o(1))}{x^{5/4}(1+o(1))}$, $x \to +\infty$, allora $\int_{5}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge. Ne segue che $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

(13) Sia $f(x) := e^{-x^2/2}$. Poiché $f(x) = e^{-x^2/2} = o\big(\frac{1}{x^{100}}\big)$, $x \to \pm\infty$, allora $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ e $\int_{0}^{+\infty} f(x)\,dx$ convergono. Ne segue che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

$\square$

Svolgimento esercizio 7

(1) Sia $f(x) := \frac{1}{(1+x^2)(x+2)^\beta}$. Poiché $f(x) = \frac{1}{x^{2+\beta}(1+o(1))}$, per $x \to +\infty$, allora l'integrale $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff 2+\beta > 1 \iff \beta > -1$.

(2) Sia $f(x) := \frac{(\log(1+\frac{1}{x}))^\beta}{\sqrt{x}+1}$. Poiché $f(x) = \frac{\frac{1}{x^\beta}(1+o(1))}{\sqrt{x}(1+o(1))} = \frac{1}{x^{\beta+1/2}}(1+o(1))$, per $x \to +\infty$, allora l'integrale $\int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta+\frac{1}{2} > 1 \iff \beta > \frac{1}{2}$.

(3) Sia $f(x) := \frac{\operatorname{arctg}(x+7)}{x(\log(x+2))^\beta}$. Poiché $f(x) = \frac{\frac{\pi}{2}(1+o(1))}{x(\log x)^\beta(1+o(1))}$, per $x \to +\infty$, allora l'integrale $\int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta > 1$.

(4) Sia $f(x) := \big(1-\cos\frac{1}{x^3}\big)^\beta x^{\beta/2}$. Poiché $f(x) = \frac{x^{\beta/2}}{(2x^6)^\beta(1+o(1))} = \frac{1}{2^\beta x^{11\beta/2}}(1+o(1))$, per $x \to +\infty$, allora l'integrale $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \frac{11}{2}\beta > 1 \iff \beta > \frac{2}{11}$.

(5) Sia $f(x) := \frac{|\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}|^\beta}{\sqrt[3]{x}}$. Poiché $f(x) = \frac{(\frac{1}{6x^3})^\beta(1+o(1))}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{6^\beta x^{1/3-3\beta}}(1+o(1))$, per $x \to +\infty$, allora l'integrale $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \frac{1}{3}-3\beta > 1 \iff \beta < -\frac{2}{9}$.

(6) Sia $f(x) := \frac{(e^x-1)^\beta}{\sqrt{x(1-x)}}$. Poiché, per $x \to 0^+$, $f(x) = \frac{x^\beta(1+o(1))}{\sqrt{x}(1+o(1))} = \frac{1}{x^{1/2-\beta}}(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_{0}^{1/2} f(x)\,dx$ converge $\iff 1/2-\beta < 1 \iff \beta > -\frac{1}{2}$. Poiché, per $x \to 1^-$, $f(x) = \frac{(e-1)^\beta(1+o(1))}{\sqrt{1-x}(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_{1/2}^{1} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Ne segue che l'integrale $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta > -\frac{1}{2}$.

(7) Sia $f(x) := \frac{\log x}{(x-1)^\beta}$. Poiché, per $x \to 1^+$, $f(x) = \frac{(x-1)(1+o(1))}{(x-1)^\beta} = \frac{1}{(x-1)^{\beta-1}(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta-1 < 1 \iff \beta < 2$. Poiché, per $x \to +\infty$, $f(x) = \frac{\log x}{x^\beta(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta > 1$. Ne segue che l'integrale $\int_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta \in (1,2)$.

(8) Sia $f(x) := \frac{\operatorname{arctg}(x^2+3)}{(x+1)^\beta(x+2)}$. Poiché, per $x \to (-1)^+$, $f(x) = \frac{\operatorname{arctg}4(1+o(1))}{(x+1)^\beta(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta < 1$. Poiché, per $x \to +\infty$, $f(x) = \frac{\frac{\pi}{2}(1+o(1))}{x^{\beta+1}(1+o(1))}$, allora l'integrale

$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta+1>1 \iff \beta>0$. Ne segue che l'integrale $\int_{-1}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta\in(0,1)$.

(9) Sia $f(x) := \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right)^{\beta}$. Poiché, per $x\to 0^+$, $f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\beta}(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_0^2 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta\in\mathbb{R}$. Poiché, per $x\to+\infty$, $f(x) = \frac{1}{x^{\beta}(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta>1$. Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta>1$.

(10) Sia $f(x) := \frac{e^{-x}}{(x-3)^{\beta}\sqrt{x}}$. Poiché, per $x\to 3^+$, $f(x) = \frac{e^{-3}(1+o(1))}{\sqrt{3}\,(x-3)^{\beta}(1+o(1))}$, allora l'integrale $\int_3^4 f(x)\,dx$ converge $\iff \beta<1$. Poiché, per $x\to+\infty$, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^{\beta+1/2}(1+o(1))} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, allora l'integrale $\int_4^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta\in\mathbb{R}$. Ne segue che l'integrale $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta<1$.

(11) Sia $f(x) := (\operatorname{arctg} x)^{\beta}(\sqrt{x}+3)^{2\beta}$. Poiché, per $x\to 0^+$, $f(x) = 3^{2\beta}x^{\beta}(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_0^4 f(x)\,dx$ converge $\iff \beta>-1$. Poiché, per $x\to+\infty$, $f(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\beta}x^{\beta}$, allora l'integrale $\int_4^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta<-1$. Ne segue che l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge per ogni $\beta\in\mathbb{R}$.

(12) Sia $f(x) := \frac{\cos^2 x+3}{x^{\beta}+\sqrt{x}}$. Per $x\to 0^+$, si ha:

(*a*) se $\beta>\frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{4\,(1+o(1))}{\sqrt{x}(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta>\frac{1}{2}$,

(*b*) se $\beta=\frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{4\,(1+o(1))}{2\sqrt{x}(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge,

(*c*) se $\beta<\frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{4\,(1+o(1))}{x^{\beta}(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta<\frac{1}{2}$.

Ne segue che l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta\in\mathbb{R}$.

(13) Si ha $\int_0^{+\infty}\left(e^{-x}+\frac{x^{2\beta}+1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx + \int_0^{+\infty} x^{2\beta-1/2}\,dx + \int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$. Ora, il primo integrale converge, la convergenza del secondo integrale dipende da β, ma il terzo integrale non converge. Poiché sono tre addendi positivi, la somma dei tre integrali non converge, per ogni $\beta\in\mathbb{R}$.

(14) Sia $f(x) := \frac{\operatorname{arctg}(\frac{1}{x^{\beta}})}{2+\sqrt{x}}$. Per $x\to 0^+$, si ha:

(*a*) se $\beta>0$, $f(x) = \frac{\pi}{4}\,(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta>0$,

(*b*) se $\beta=0$, $f(x) = \frac{\pi}{8}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge,

(*c*) se $\beta<0$, $f(x) = \frac{x^{-\beta}\,(1+o(1))}{2\,(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta<0$.

Ne segue che l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta\in\mathbb{R}$. Per $x\to+\infty$, si ha:

(*d*) se $\beta>0$, $f(x) = \frac{\frac{1}{x^{\beta}}\,(1+o(1))}{x^{1/2}\,(1+o(1))} = \frac{1}{x^{\beta+1/2}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta+1/2>1 \iff \beta>\frac{1}{2}$,

(*e*) se $\beta=0$, $f(x) = \frac{\frac{\pi}{4}}{x^{1/2}\,(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge,

(*f*) se $\beta<0$, $f(x) = \frac{\frac{\pi}{2}\,(1+o(1))}{x^{1/2}\,(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge per ogni $\beta<0$.

Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta > \frac{1}{2}$. Allora, l'integrale proposto converge $\iff \beta > \frac{1}{2}$.

(15) Sia $f(x) := \frac{|\sin\frac{1}{\sqrt{x}}|^\beta}{\sqrt{x}\log(1+\sqrt[3]{x})}$. Per $x \to 0^+$, si ha $0 \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{x}\log(1+\sqrt[3]{x})} = \frac{1}{x^{5/6}(1+o(1))}$, da cui segue che l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta \ge 0$. Per $x \to +\infty$, si ha:

(a) se $\beta > 0$, $f(x) = \frac{\frac{1}{x^{\beta/2}}(1+o(1))}{\frac{1}{3}x^{1/2}\log x(1+o(1))} = \frac{3}{x^{(\beta+1)/2}\log x}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff (\beta+1)/2 > 1 \iff \beta > 1$,

(b) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{3}{x^{1/2}\log x}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge.

Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta > 1$. Allora, l'integrale proposto converge $\iff \beta > 1$.

(16) Sia $f(x) := \frac{x(1-\cos x)e^{-x}}{\operatorname{arctg}(x^\beta)}$. Per $x \to 0^+$, si ha:

(a) se $\beta > 0$, $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3\,(1+o(1))}{x^\beta(1+o(1))} = \frac{1}{2x^{\beta-3}(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\iff \beta - 3 < 1 \iff \beta < 4$,

(b) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3\,(1+o(1))}{\frac{\pi}{4}}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge,

(c) se $\beta < 0$, $f(x) = \frac{\frac{1}{2}x^3\,(1+o(1))}{\frac{\pi}{2}(1+o(1))}$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta < 0$.

Ne segue che l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\iff \beta < 4$. Per $x \to +\infty$, si ha $0 \le f(x) \le \frac{xe^{-x}}{\operatorname{arctg}(x^\beta)} =: g(x)$ e

(d) se $\beta > 0$, $g(x) = \frac{xe^{-x}}{x^\beta(1+o(1))} = o\big(\frac{1}{x^2}\big)$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta > 0$,

(e) se $\beta = 0$, $g(x) = \frac{xe^{-x}}{\frac{\pi}{4}} = o\big(\frac{1}{x^2}\big)$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge,

(f) se $\beta < 0$, $g(x) = \frac{xe^{-x}}{\frac{\pi}{2}(1+o(1))} = o\big(\frac{1}{x^2}\big)$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta < 0$.

Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Allora, l'integrale proposto converge $\iff \beta < 4$.

(17) Sia $f(x) := \frac{2x+\sin(x^\beta)}{e^x-\cos(x^\beta)}$. Per $x \to 0^+$, e $\beta > 0$, $f(x) = \frac{2x+x^\beta+o(x^\beta)}{1+x+o(x)-1+\frac{1}{2}x^{2\beta}+o(x^{2\beta})}$, per cui si ha:

(a) se $\beta > 1$, $f(x) = \frac{2x(1+o(1))}{x(1+o(1))} = 2(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta > 1$,

(b) se $\beta = 1$, $f(x) = \frac{3x(1+o(1))}{x(1+o(1))} = 3(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge ,

(c) se $\frac{1}{2} < \beta < 1$, $f(x) = \frac{x^\beta(1+o(1))}{x(1+o(1))} = \frac{1}{x^{1-\beta}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\iff 1-\beta < 1 \iff \beta > 0$,

(d) se $\beta = \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{x^{1/2}(1+o(1))}{\frac{3}{2}x(1+o(1))} = \frac{2}{3}\frac{1}{x^{1/2}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge,

(e) se $0 < \beta < \frac{1}{2}$, $f(x) = \frac{x^\beta(1+o(1))}{\frac{1}{2}x^{2\beta}(1+o(1))} = \frac{2}{x^\beta}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge $\iff \beta < 1$,

(f) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{2x+\sin 1}{e^x - \cos 1} = \frac{\sin 1}{e - \cos 1}(1 + o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\, dx$ converge.

Ne segue che l'integrale $\int_0^1 f(x)\, dx$ converge per ogni $\beta \geq 0$. Per $x \to +\infty$, $f(x) = \frac{2x(1+o(1))}{e^x(1+o(1))}$, per cui l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge per ogni $\beta \geq 0$. Allora, l'integrale proposto converge per ogni $\beta \geq 0$.

□

Svolgimento esercizio 8

(1) Sia $f(x) := \dfrac{\sqrt{x}}{x^\beta (x-2)}$. Per $x \to 0^+$, si ha $f(x) = -\dfrac{1}{2x^{\beta - 1/2}}(1+o(1))$, per cui $\int_0^1 f(x)\, dx$ converge $\iff \beta - \frac{1}{2} < 1 \iff \beta < 3/2$.

Posto $\beta = 1$, determiniamo una primitiva $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x}} \overset{(a)}{=} \int \frac{2z\, dz}{z(z^2-2)} \overset{(b)}{=} \frac{\sqrt{2}}{2} \int \Big(\frac{1}{z-\sqrt{2}} - \frac{1}{z+\sqrt{2}} \Big)\, dz = \frac{\sqrt{2}}{2} \log\Big| \frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}} \Big| + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \log\Big| \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} \Big| + C$, dove si è usata in ($a$) la sostituzione $\sqrt{x} = z \implies x = z^2, dx = 2z\, dz$, e in ($b$) la decomposizione $\dfrac{2}{z^2-2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big(\dfrac{1}{z-\sqrt{2}} - \dfrac{1}{z+\sqrt{2}} \Big)$. Allora $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x}} = \lim_{a \to 0^+} \Big[\frac{\sqrt{2}}{2} \log\Big| \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} \Big| \Big]_a^1 = \lim_{a \to 0^+} \Big(\frac{\sqrt{2}}{2} \log\Big| \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \Big| - \frac{\sqrt{2}}{2} \log\Big| \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}} \Big| \Big) = \frac{\sqrt{2}}{2} \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$.

(2) Sia $f(x) := \Big(\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{(x-1)^2} \Big)^\beta \frac{1}{x \sqrt[3]{x-1}}$. Poiché, per $x \to 1^+$, $f(x) = \frac{(\frac{\pi}{4})^\beta (1+o(1))}{(x-1)^{2\beta}} \frac{1}{(x-1)^{1/3}(1+o(1))} = (\frac{\pi}{4})^\beta \frac{1}{(x-1)^{2\beta+1/3}}(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_0^4 f(x)\, dx$ converge $\iff 2\beta + 1/3 < 1 \iff \beta < \frac{1}{3}$. Poiché, per $x \to +\infty$, $f(x) = \frac{\frac{1}{x^\beta}(1+o(1))}{x^{2\beta+4/3}(1+o(1))} = \frac{1}{x^{3\beta+4/3}}(1+o(1))$, allora l'integrale $\int_4^{+\infty} f(x)\, dx$ converge $\iff 3\beta + 4/3 > 1 \iff \beta > -\frac{1}{9}$. Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge $\iff \beta \in (-\frac{1}{9}, \frac{1}{3})$.

Posto $\beta = 0$, determiniamo una primitiva $\int \frac{1}{x \sqrt[3]{x-1}}\, dx \overset{(a)}{=} \int \frac{3y\, dy}{y^3+1} \overset{(b)}{=} \int \big(-\frac{1}{y+1} + \frac{1}{2} \frac{2y-1}{y^2-y+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{y^2-y+1} \big)\, dy + C = -\log|y+1| + \frac{1}{2}\log(y^2-y+1) + 2\int \frac{dy}{1+\big(\frac{2y-1}{\sqrt{3}}\big)^2} + C = \frac{1}{2} \log\big(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1} + 1 \big) - \log|1 + \sqrt[3]{x-1}| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt[3]{x-1} = y \implies x = y^3+1$, $dx = 3y^2\, dy$, e in (b) la decomposizione $\frac{3y}{y^3+1} = -\frac{1}{y+1} + \frac{y+1}{y^2-y+1} = -\frac{1}{y+1} + \frac{1}{2} \frac{2y-1}{y^2-y+1} + \frac{3}{2} \frac{1}{y^2-y+1}$.

Allora $\int_1^\infty \frac{1}{x \sqrt[3]{x-1}}\, dx = \lim_{c \to 1^+} \big[\frac{1}{2} \log\big(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1} + 1 \big) - \log|1+\sqrt[3]{x-1}| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}} \big]_c^2 +$

$+ \lim_{\omega \to +\infty} \big[\frac{1}{2} \log\big(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1} + 1 \big) - \log|1 + \sqrt[3]{x-1}| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}} \big]_2^\omega =$

$= -\lim_{c \to 1^+} \Big(\frac{1}{2} \log\big(\sqrt[3]{(c-1)^2} - \sqrt[3]{c-1} + 1 \big) - \log|1 + \sqrt[3]{c-1}| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{c-1}-1}{\sqrt{3}} \Big) +$

$+ \lim_{\omega \to +\infty} \Big(\frac{1}{2} \log\big(\sqrt[3]{(\omega-1)^2} - \sqrt[3]{\omega-1} + 1 \big) - \log|1 + \sqrt[3]{\omega-1}| + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}} \Big) =$

$= \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \lim_{\omega \to +\infty} \Big(\frac{1}{2} \log \frac{\sqrt[3]{(\omega-1)^2} - \sqrt[3]{\omega-1}+1}{(1+\sqrt[3]{\omega-1})^2} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}} \Big) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

(3) Sia $f(x) := \dfrac{x+2}{x(x^2+2)}\, e^{\beta x^2}$. Per $x \to +\infty$, si ha $f(x) = \dfrac{e^{\beta x^2}}{x^2}(1+o(1))$, per cui

- (a) se $\beta > 0$, $f(x) \to +\infty$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ non converge,
- (b) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{1}{x^2}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge,
- (c) se $\beta < 0$, $f(x) = o(\frac{1}{x^2})$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge per ogni $\beta < 0$.

Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge per ogni $\beta \le 0$.

Posto $\beta = 0$, determiniamo una primitiva $\displaystyle\int \frac{x+2}{x(x^2+2)}\, dx \overset{(a)}{=} \int \Big(\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+2}\Big)\, dx = \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+2) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(\frac{x}{\sqrt{2}})^2+1} = \log|x| - \frac{1}{2}\log(x^2+2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C$, dove si è usata in (a) la decomposizione $\dfrac{x+2}{x(x^2+2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x-1}{x^2+2}$.

Allora $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x(x^2+2)}\, dx = \lim_{\omega\to+\infty}\Big[\frac{1}{2}\log\frac{x^2}{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\Big]_1^{\omega} = \lim_{\omega\to+\infty}\Big(\frac{1}{2}\log\frac{\omega^2}{\omega^2+2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\omega}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(4) Sia $f(x) := \log(1+x^\beta)\ \Big(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+3)^2}\Big)$. Per $x \to 0^+$, si ha:

- (a) se $\beta > 0$, $f(x) = x^\beta\,(1+o(1))\frac{1}{x^2}(1+o(1)) = \frac{1}{x^{2-\beta}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\, dx$ converge $\iff 2-\beta < 1 \iff \beta > 1$,
- (b) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{\log 2}{x^2}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\, dx$ non converge,
- (c) se $\beta < 0$, $f(x) = \beta\log x(1+o(1))\frac{1}{x^2}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\, dx$ non converge per ogni $\beta < 0$.

Ne segue che l'integrale $\int_0^1 f(x)\, dx$ converge $\iff \beta > 1$. Per $x \to +\infty$, si ha:

- (d) se $\beta > 0$, $f(x) = \beta\log x(1+o(1))\frac{2}{x^2}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge per ogni $\beta > 0$,
- (e) se $\beta = 0$, $f(x) = \frac{2\log 2}{x^2}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge,
- (f) se $\beta < 0$, $f(x) = x^\beta(1+o(1))\frac{2}{x^2}(1+o(1)) = \frac{2}{x^{2-\beta}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge $\iff 2-\beta > 1 \iff \beta < 1$.

Ne segue che l'integrale $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Allora, l'integrale proposto converge $\iff \beta > 1$.

Posto $\beta = 2$, determiniamo una primitiva $\int \log(1+x^2)\ \big(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+3)^2}\big)\, dx \overset{(a)}{=} -\frac{2x+3}{x(x+3)}\ \log(1+x^2) + \int \frac{2x}{x^2+1}\cdot\frac{2x+3}{x(x+3)}\, dx = -\frac{2x+3}{x(x+3)}\ \log(1+x^2) + 2\int \frac{2x+3}{(x+3)(x^2+1)}\, dx \overset{(b)}{=} -\frac{2x+3}{x(x+3)}\ \log(1+x^2) + 2\int \big(-\frac{3}{10}\,\frac{1}{x+3} + \frac{3}{20}\,\frac{2x}{x^2+1} + \frac{11}{10}\,\frac{1}{x^2+1}\big)\, dx = -\frac{2x+3}{x(x+3)}\ \log(1+x^2) - \frac{3}{5}\log|x+3| + \frac{3}{10}\log(x^2+1) + \frac{11}{5}\operatorname{arctg} x + C$, dove si

sono usate in (a) l'integrazione per parti con $\begin{cases} f(x) = \log(1+x^2), & f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}, \\ g'(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+3)^2}, & g(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = -\frac{2x+3}{x(x+3)}, \end{cases}$
in (b) la decomposizione $\frac{2x+3}{(x+3)(x^2+1)} = -\frac{3}{10}\,\frac{1}{x+3} + \frac{1}{10}\,\frac{3x+11}{x^2+1} = -\frac{3}{10}\,\frac{1}{x+3} + \frac{3}{20}\,\frac{2x}{x^2+1} + \frac{11}{10}\,\frac{1}{x^2+1}$.
Allora $\int_0^\infty \log(1+x^2)\,\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+3)^2}\right) dx =$
$= \lim_{c\to 0^+} \left[-\frac{2x+3}{x(x+3)}\,\log(1+x^2) - \frac{3}{5}\log|x+3| + \frac{3}{10}\log(x^2+1) + \frac{11}{5}\operatorname{arctg} x \right]_c^2 +$
$+ \lim_{\omega\to+\infty} \left[-\frac{2x+3}{x(x+3)}\,\log(1+x^2) - \frac{3}{5}\log|x+3| + \frac{3}{10}\log(x^2+1) + \frac{11}{5}\operatorname{arctg} x \right]_2^\omega =$
$= \lim_{c\to 0^+} \left(\frac{2c+3}{c(c+3)}\,\log(1+c^2) + \frac{3}{5}\log|c+3| - \frac{3}{10}\log(c^2+1) - \frac{11}{5}\operatorname{arctg} x \right) +$
$+ \lim_{\omega\to+\infty} \left(-\frac{2\omega+3}{\omega(\omega+3)}\,\log(1+\omega^2) - \frac{3}{5}\log|\omega+3| + \frac{3}{10}\log(\omega^2+1) + \frac{11}{5}\operatorname{arctg}\omega \right) =$
$= \frac{3}{5}\log 3 + \lim_{\omega\to+\infty} \left(-\frac{2\omega+3}{\omega(\omega+3)}\,\log(1+\omega^2) + \frac{3}{10}\log\frac{\omega^2+1}{(\omega+3)^2} + \frac{11}{5}\operatorname{arctg}\omega \right) = \frac{3}{5}\log 3 + \frac{11}{10}\pi.$

(5) Sia $f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}(x+7x^\beta)}$. Per $x \to 0^+$, si ha:

(a) se $\beta > 1$, $f(x) = \frac{1}{-\sqrt[3]{2}x}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ non converge per ogni $\beta > 1$,

(b) se $\beta = 1$, $f(x) = \frac{1}{-8\sqrt[3]{2}x}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ non converge,

(c) se $\beta < 1$, $f(x) = \frac{1}{-7\sqrt[3]{2}x^\beta}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta < 1$.

Ne segue che l'integrale $\int_0^{1/2} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta < 1$. Per $x \to 1$, si ha $f(x) = \frac{1}{(2+7\cdot 2^\beta)\sqrt[3]{x-1}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_{1/2}^3 f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Per $x \to +\infty$, si ha:

(d) se $\beta > 1$, $f(x) = \frac{1}{7x^{\beta+1/3}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\iff \beta + 1/3 > 1 \iff \beta > \frac{2}{3}$,

(e) se $\beta = 1$, $f(x) = \frac{1}{8x^{4/3}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ converge,

(f) se $\beta < 1$, $f(x) = \frac{1}{x^{4/3}}(1+o(1))$, e l'integrale $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta < 1$.

Ne segue che l'integrale $\int_3^{+\infty} f(x)\,dx$ converge per ogni $\beta \in \mathbb{R}$. Allora, l'integrale proposto converge $\iff \beta < 1$.

Posto $\beta = 0$, determiniamo una primitiva $\int \frac{1}{(x+7)\sqrt[3]{x-1}}\,dx \overset{(a)}{=} \int \frac{3y\,dy}{y^3+8} \overset{(b)}{=} \int \left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{y+2} + \frac{1}{4}\,\frac{2y-2}{y^2-2y+4} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{y^2-2y+4} \right) dy + C = -\frac{1}{2}\,\log|y+2| + \frac{1}{4}\log(y^2-2y+4) + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{1+\left(\frac{y-1}{\sqrt{3}}\right)^2} + C = \frac{1}{4}\,\log\left(\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1}+4\right) - \frac{1}{2}\,\log|2+\sqrt[3]{x-1}| + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}} + C$, dove si sono usate in (a) la sostituzione $\sqrt[3]{x-1} = y \implies x = y^3+1$, $dx = 3y^2\,dy$, e in (b) la decomposizione $\frac{3y}{y^3+8} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{y+2} + \frac{1}{2}\,\frac{y+2}{y^2-2y+4} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{y+2} + \frac{1}{4}\,\frac{2y-2}{y^2-2y+4} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{y^2-2y+4}$.
Allora $\int_0^\infty \frac{1}{(x+7)\sqrt[3]{x-1}}\,dx =$
$= \lim_{a\to 1^-} \left[\frac{1}{4}\,\log\left(\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1}+4\right) - \frac{1}{2}\,\log|2+\sqrt[3]{x-1}| + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}} \right]_0^a +$
$+ \lim_{b\to 1^+} \left[\frac{1}{4}\,\log\left(\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1}+4\right) - \frac{1}{2}\,\log|2+\sqrt[3]{x-1}| + \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}} \right]_b^2 +$

$+ \lim_{\omega\to+\infty} \left[\frac{1}{4}\, \log\left(\sqrt[3]{(x-1)^2} - 2\sqrt[3]{x-1} + 4\right) - \frac{1}{2}\, \log|2+\sqrt[3]{x-1}| + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{3}}\right]_2^{\omega} =$
$= \lim_{a\to1^-} \left(\frac{1}{4}\, \log\left(\sqrt[3]{(a-1)^2} - 2\sqrt[3]{a-1} + 4\right) - \frac{1}{2}\, \log|2+\sqrt[3]{a-1}| + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{a-1}-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{4} \log 7 + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}}\right) +$
$- \lim_{b\to1^+} \left(\frac{1}{4}\, \log\left(\sqrt[3]{(b-1)^2} - 2\sqrt[3]{b-1} + 4\right) - \frac{1}{2}\, \log|2+\sqrt[3]{b-1}| + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{b-1}-1}{\sqrt{3}}\right) +$
$+ \lim_{\omega\to+\infty} \left(\frac{1}{4} \log\left(\sqrt[3]{(\omega-1)^2} - 2\sqrt[3]{\omega-1} + 4\right) - \frac{1}{2}\, \log|2+\sqrt[3]{\omega-1}| + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}}\right) =$
$= -\frac{1}{4} \log 7 + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \lim_{\omega\to+\infty} \left(\frac{1}{4} \log \frac{\sqrt[3]{(\omega-1)^2} - 2\sqrt[3]{\omega-1} + 4}{(2+\sqrt[3]{\omega-1})^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[3]{\omega-1}-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{4}\, \log 7 +$
$\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi\sqrt{3}}{12} + \frac{\pi\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{4} \log 7 + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$

$\square$

Analisi Matematica I
Equazioni differenziali

Esercizio 1. Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy con equazione differenziale del primo ordine, a variabili separabili

$$(1)\quad \begin{cases} y' = y^{2/3} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} y' = 8ty + t \\ y(1) = \frac{7}{8} \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} y' = -\frac{y}{t} + \frac{1}{t} \\ y(1) = 2, \text{oppure } y(1) = 1 \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} y' = \frac{y+1}{\sqrt{t}} \\ y(1) = 1, \text{oppure } y(1) = -1 \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} y' = 2ty^2 \\ y(0) = -1, \text{oppure } y(0) = 0 \end{cases}$$

$$(6)\quad \begin{cases} y' = \frac{t}{y} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} y' = \frac{1+y^2}{2t^2 y} \\ y(1) = -1, \text{oppure } y(1) = 1 \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} y' = \frac{1+y^2}{t^2} \\ y(-1) = 1, \text{oppure } y(1) = -1 \end{cases}$$

$$(9)\quad \begin{cases} y' = \frac{(t-1)y}{(t+1)(t^2+1)} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} y' = 2t\sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} y' = \frac{y \log y}{t} \\ y(1) = e, \text{oppure } y(1) = 1 \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} y' = (y+1)\cos t \\ y(0) = 1, \text{oppure } y(0) = -1 \end{cases}$$

$$(13)\quad \begin{cases} y' = \cos^2 y \\ y(0) = \frac{\pi}{4}, \text{oppure } y(0) = \frac{\pi}{2}, \text{oppure } y(0) = \pi \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} y' = \frac{1}{y \operatorname{tg} t} \\ y(-\frac{\pi}{6}) = -1, \text{oppure } y(-\frac{\pi}{6}) = 1 \end{cases}$$

(15) $\begin{cases} y' = \sqrt{\frac{y}{t}}\,\sin\sqrt{t} \\ y(\frac{\pi^2}{4}) = 1, \text{oppure } y(\frac{\pi^2}{4}) = 0 \end{cases}$

(16) $\begin{cases} y' = \sqrt{yt} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

(17) $\begin{cases} y' = y^{2/3}\sqrt{1-t^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Esercizio 2. Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy con equazione differenziale lineare del primo ordine

(1) $\begin{cases} y' = y + t \\ y(1) = e - 2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} y' = \frac{y}{t} + t^2 e^t \\ y(1) = -1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} y' = \frac{1-t^4}{t}\,y + t^4 \\ y(2) = -2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} y' = -\frac{2}{t}\,y + \frac{1}{t+1} \\ y(1) = 3 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} y' = -\frac{2}{t+1}\,y + \frac{1}{t} \\ y(1) = -\frac{3}{8} \end{cases}$

(6) $\begin{cases} y' = \frac{2y}{t} + \frac{t+1}{t} \\ y(1) = 3 \end{cases}$

(7) $\begin{cases} y' = \frac{t-1}{t}\,y + t^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} y' = \frac{y}{t(1+t^2)} + \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} \\ y(2) = 0 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} y' = \frac{y+t}{\sqrt{t}} \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$

(10) $\begin{cases} y' = -\frac{y}{2t} + \sqrt{t} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

(11) $\begin{cases} y' = \frac{y}{t\log t} + \frac{1}{t} \\ y(e) = 1 \end{cases}$

(12) $\begin{cases} y' = (y + \cos^2 t)\sin t \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$

(13) $\begin{cases} y' = y \ \operatorname{tg} t + \sin t \\ y(0) = 2 \end{cases}$

(14) $\begin{cases} y' = \frac{y}{\operatorname{tg} t} + \sin t \\ y(\frac{\pi}{6}) = 1 \end{cases}$

Esercizio 3. Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy con equazione differenziale lineare a coefficienti costanti

(1) $y'' - 5y' + 4y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1,$

(2) $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2,$

(3) $y'' + 2y' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$

(4) $y'' - y' - 6y = -e^{4t} + 6,\ y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{1}{3},$

(5) $y'' + 3y' - 4y = 4 + 17 \sin t,\ y(0) = -\dfrac{1}{2},\ y'(0) = \dfrac{1}{2},$

(6) $y'' + y = \sin 2t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$

(7) $y'' + 2y' + 5y = e^{-t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$

(8) $y'' + 2y' + y = e^{t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$

(9) $y'' + 3y' + 2y = e^{-t},\ y(0) = -\dfrac{1}{2},\ y'(0) = \dfrac{1}{2},$

(10) $y'' - y' = t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1,$

(11) $y'' - 2y' = e^{2t} + t - 1,\ y(0) = 0,\ y'(0) = \dfrac{1}{4},$

(12) $y'' = t^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1,$

(13) $y'' + y = \sin t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$

(14) $y'' + 2y' + y = te^{-t},\ y(0) = -\dfrac{1}{2},\ y'(0) = -\dfrac{1}{2},$

(15) $y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \cos 2t,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,$

(16) $y''' - y' = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1,$

(17) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 2,$

(18) $y''' + y'' - 2y = 5e^{t},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0,$

(19) $y^{(4)} - 4y'' = 8,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 5,\ y'''(0) = 2,$

(20) $y^{(4)} + 2y'' + y = 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1,\ y'''(0) = 1,$

Analisi Matematica I
Equazioni differenziali (svolgimenti)

Svolgimento esercizio 1

(1) Si ha $\int y^{-2/3}\,dy = \int dt \iff 3\sqrt[3]{y} = t + c$. Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 3$, per cui $y(t) = \left(1 + \frac{t}{3}\right)^3$, $t \in \mathbb{R}$.

(2) Si ha $\int \frac{dy}{8y+1} = \int t\,dt \iff \frac{1}{8}\log|8y+1| = \frac{1}{2}t^2 + c \iff 8y + 1 = c'e^{4t^2} \iff y = c''e^{4t^2} - \frac{1}{8}$. Dalla condizione iniziale otteniamo $\frac{7}{8} = c'' - \frac{1}{8} \iff c'' = 1$, per cui $y(t) = e^{4t^2} - \frac{1}{8}$, $t \in \mathbb{R}$.

(3) Si ha $\int \frac{dy}{y-1} = -\int \frac{dt}{t} \iff \log|y-1| = -\log|t| + c \iff y - 1 = \frac{c'}{t} \iff y = \frac{c'}{t} + 1$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $2 = c' + 1 \iff c' = 1$, per cui $y(t) = \frac{1}{t} + 1$, $t > 0$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = 1$, $t > 0$.

(4) Si ha $\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} \iff \log|y+1| = 2\sqrt{t} + c \iff y + 1 = c'e^{2\sqrt{t}} \iff y = c'e^{2\sqrt{t}} - 1$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $1 = c'e^2 - 1 \iff c' = \frac{2}{e^2}$, per cui $y(t) = 2e^{2(\sqrt{t}-1)} - 1$, $t > 0$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = -1$, $t > 0$.

(5) Si ha $\int \frac{dy}{y^2} = \int 2t\,dt \iff -\frac{1}{y} = t^2 + c \iff y = \frac{1}{c'-t^2}$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $-1 = \frac{1}{c'} \iff c' = -1$, per cui $y(t) = -\frac{1}{t^2+1}$, $t \in \mathbb{R}$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

(6) Si ha $\int y\,dy = \int t\,dt \iff \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}t^2 + c \iff y = \pm\sqrt{t^2 + c'}$. Dalla condizione iniziale otteniamo $-1 = -\sqrt{c'} \iff c' = 1$, per cui $y(t) = -\sqrt{t^2+1}$, $t \in \mathbb{R}$.

(7) Si ha $\int \frac{2y\,dy}{y^2+1} = \int \frac{dt}{t^2} \iff \log(y^2+1) = -\frac{1}{t} + c \iff y^2 + 1 = c'e^{-\frac{1}{t}} \iff y = \pm\sqrt{c'e^{-\frac{1}{t}} - 1}$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $-1 = -\sqrt{c'e^{-1} - 1} \iff c' = 2e$, per cui $y(t) = -\sqrt{2e^{1-\frac{1}{t}} - 1}$, $t > \frac{1}{1+\log 2}$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = \sqrt{2e^{1-\frac{1}{t}} - 1}$, $t > \frac{1}{1+\log 2}$.

(8) Si ha $\int \frac{dy}{y^2+1} = \int \frac{dt}{t^2} \iff \operatorname{arctg} y = -\frac{1}{t} + c \iff y = \operatorname{tg}(c - \frac{1}{t})$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $1 = \operatorname{tg}(c+1) \iff c = \frac{\pi}{4} - 1$, per cui $y(t) = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - 1 - \frac{1}{t})$, $t < -\frac{1}{1+\frac{\pi}{4}}$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $-1 = \operatorname{tg}(c-1) \iff c = 1 - \frac{\pi}{4}$, per cui $y(t) = \operatorname{tg}(1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{t})$, $t > \frac{1}{1+\frac{\pi}{4}}$.

(9) Si ha $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(t-1)\,dt}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{t\,dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t+1} \iff \log|y| = \frac{1}{2}\log(t^2+1) - \log|t+1| + c \iff y = c'\frac{\sqrt{t^2+1}}{t+1}$. Dalla condizione iniziale otteniamo $-1 = c'$, per cui $y(t) = -\frac{\sqrt{t^2+1}}{t+1}$, $t > -1$.

(10) Si ha $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int 2t\,dt \iff \arcsin y = t^2 + c \iff y = \sin(t^2 + c)$. Dalla condizione iniziale otteniamo $0 = c$, per cui $y(t) = \sin(t^2)$, $|t| < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(11) Si ha $\int \frac{dy}{y\log y} = \int \frac{dt}{t} \iff \log|\log y| = \log|t| + c \iff \log y = c't \iff y = e^{c't}$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $c' = \log e = 1$, per cui $y(t) = e^t$, $t > 0$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = 1$, $t > 0$.

(12) Si ha $\int \frac{dy}{y+1} = \int \cos t\,dt \iff \log|y+1| = \sin t + c \iff y = c'e^{\sin t} - 1$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $1 = c' - 1 \iff c' = 2$, per cui $y(t) = 2e^{\sin t} - 1$, $t \in \mathbb{R}$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = -1$, $t \in \mathbb{R}$.

(13) Si ha $\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int dt \iff \operatorname{tg} y = t + c$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $c = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$, per cui $y(t) = \operatorname{arctg}(t+1)$, $t \in \mathbb{R}$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = \frac{\pi}{2}$, $t \in \mathbb{R}$. Dalla terza condizione iniziale otteniamo $c = \operatorname{tg}\pi = 0$, per cui $y(t) = \pi + \operatorname{arctg} t$, $t \in \mathbb{R}$ [in quanto la funzione inversa di $\operatorname{tg}|_{(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})}$ è $\pi + \operatorname{arctg}$].

(14) Si ha $\int y\,dy = \int \frac{\cos t}{\sin t}\,dt \iff \frac{1}{2}y^2 = \log|\sin t| + c$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $c = \frac{1}{2} + \log 2$, per cui $y(t) = -\sqrt{\log(4\sin^2 t) + 1}$, $t \in \big(-\pi + \arcsin\frac{1}{2\sqrt{e}}, -\arcsin\frac{1}{2\sqrt{e}}\big)$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = \sqrt{\log(4\sin^2 t) + 1}$, $t \in \big(-\pi + \arcsin\frac{1}{2\sqrt{e}}, -\arcsin\frac{1}{2\sqrt{e}}\big)$.

(15) Si ha $\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt \iff 2\sqrt{y} = -2\cos\sqrt{t} + c$. Dalla prima condizione iniziale otteniamo $c = 1$, per cui $y(t) = (1 - \cos\sqrt{t})^2$, $t > 0$. Dalla seconda condizione iniziale otteniamo $y(t) = 0$, $t > 0$.

(16) Si ha $\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \sqrt{t}\,dt \iff 2\sqrt{y} = \frac{2}{3}t^{3/2} + c \iff y = \big(\frac{1}{3}t^{3/2} + \frac{c}{2}\big)^2$. Dalla condizione iniziale otteniamo $2 = c$, per cui $y(t) = \big(\frac{1}{3}t^{3/2} + 1\big)^2$, $t \geq 0$.

(17) Si ha $\int \frac{dy}{y^{2/3}} = \int \sqrt{1-t^2}\,dt \iff 3y^{1/3} \overset{(a)}{=} \int \cos^2 z\,dz = \frac{1}{2}\int(1 + \cos 2z)\,dz = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\sin z\cos z + c = \frac{1}{2}\arcsin t + \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2} + c \iff y = \big(\frac{1}{6}\arcsin t + \frac{1}{6}t\sqrt{1-t^2} + \frac{c}{3}\big)^3$ [dove in (a) si è usata la sostituzione $t = \sin z$]. Dalla condizione iniziale otteniamo $3 = c$, per cui $y(t) = \big(\frac{1}{6}\arcsin t + \frac{1}{6}t\sqrt{1-t^2} + 1\big)^3$, $t \in [-1, 1]$.

□

Svolgimento esercizio 2

(1) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int dt \iff \log|y| = t + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = ce^t$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)e^t$, per cui $y_p'(t) = c'(t)e^t + c(t)e^t$, e quindi $c'(t)e^t + c(t)e^t = c(t)e^t + t \iff c'(t) = te^{-t} \implies c(t) = \int te^{-t}\,dt = -(t+1)e^{-t}$. Quindi $y_p(t) = -(t+1)$, per cui $y_{gen}(t) = ce^t - t - 1$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 1$, per cui $y_{Cauchy}(t) = e^t - t - 1$, $t \in \mathbb{R}$.

(2) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t} \iff \log|y| = \log|t| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = ct$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)t$, per cui $y_p'(t) = c'(t)t + c(t)$, e quindi $c'(t)t + c(t) = c(t) + t^2e^t \iff c'(t) = te^t \implies c(t) = \int te^t\,dt = (t-1)e^t$. Quindi $y_p(t) = t(t-1)e^t$, per cui $y_{gen}(t) = ct + t(t-1)e^t$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = -1$, per cui $y_{Cauchy}(t) = t(t-1)e^t - t$, $t > 0$.

(3) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{(1-t^4)\,dt}{t} \iff \log|y| = \log|t| - \frac{1}{4}t^4 + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = cte^{-t^4/4}$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)te^{-t^4/4}$, per cui $y_p'(t) = c'(t)te^{-t^4/4} + c(t)(1 - t^4)e^{-t^4/4}$, e quindi $c'(t)te^{-t^4/4} + c(t)(1-t^4)e^{-t^4/4} = c(t)(1-t^4)e^{-t^4/4} + t^4 \iff c'(t) = t^3e^{t^4/4} \implies c(t) = \int t^3e^{t^4/4}\,dt = e^{t^4/4}$. Quindi $y_p(t) = t$, per cui $y_{gen}(t) = cte^{-t^4/4} + t$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = -2e$, per cui $y_{Cauchy}(t) = t - 2te^{1-t^4/4}$, $t > 0$.

(4) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = -2 \int \frac{dt}{t} \iff \log|y| = -2\log|t| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{c}{t^2}$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)}{t^2}$, per cui $y_p'(t) = \frac{c'(t)}{t^2} - \frac{2c(t)}{t^3}$, e quindi $\frac{c'(t)}{t^2} - \frac{2c(t)}{t^3} = -\frac{2c(t)}{t^3} + \frac{1}{t+1} \iff c'(t) = \frac{t^2}{t+1} \implies c(t) = \int \frac{t^2}{t+1}\,dt = \frac{1}{2}\,t^2 - t + \log|t+1|$. Quindi $y_p(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\,\log|t+1|$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{c}{t^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\,\log|t+1|$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = \frac{1}{2}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} + \frac{1}{t^2}\,\log(t+1)$, $t > 0$.

(5) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = -2 \int \frac{dt}{t+1} \iff \log|y| = -2\log|t+1| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{c}{(t+1)^2}$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)}{(t+1)^2}$, per cui $y_p'(t) = \frac{c'(t)}{(t+1)^2} - \frac{2c(t)}{(t+1)^3}$, e quindi $\frac{c'(t)}{(t+1)^2} - \frac{2c(t)}{(t+1)^3} = -\frac{2c(t)}{(t+1)^3} + \frac{1}{t} \iff c'(t) = \frac{t^2}{t+1} \implies c(t) = \int \frac{(t+1)^2}{t}\,dt = \frac{1}{2}\,t^2 + 2t + \log|t|$. Quindi $y_p(t) = \frac{t^2+4t+\log t^2}{2(t+1)^2}$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{2c+4t+t^2+\log t^2}{2(t+1)^2}$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $2c = -1$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{-1+4t+t^2+\log t^2}{2(t+1)^2}$, $t > 0$.

(6) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dt}{t} \iff \log|y| = 2\log|t| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = ct^2$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)t^2$, per cui $y_p'(t) = c'(t)t^2 + 2tc(t)$, e quindi $c'(t)t^2 + 2tc(t) = 2tc(t) + \frac{t+1}{t} \iff c'(t) = \frac{t+1}{t^2} \implies c(t) = \int \frac{t+1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} - \frac{1}{2t^2}$. Quindi $y_p(t) = -t - \frac{1}{2}$, per cui $y_{gen}(t) = ct^2 - t - \frac{1}{2}$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = \frac{9}{2}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{9}{2}\,t^2 - t - \frac{1}{2}$, $t > 0$.

(7) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{(t-1)\,dt}{t} \iff \log|y| = t - \log|t| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{c}{t}\,e^t$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)}{t}\,e^t$, per cui $y_p'(t) = \frac{c'(t)}{t}\,e^t + c(t)\,\frac{t-1}{t^2}\,e^t$, e quindi $\frac{c'(t)}{t}\,e^t + c(t)\,\frac{t-1}{t^2}\,e^t = c(t)\,\frac{t-1}{t^2}\,e^t + t^2 \iff c'(t) = t^3e^{-t} \implies c(t) = \int t^3e^{-t}\,dt = -(t^3+3t^2+6t+6)e^{-t}$.
Quindi $y_p(t) = -t^2 - 3t - 6 - \frac{6}{t}$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{c}{t}\,e^t - t^2 - 3t - 6 - \frac{6}{t}$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = \frac{16}{e}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{16}{t}\,e^{t-1} - t^2 - 3t - 6 - \frac{6}{t}$, $t > 0$.

(8) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t(t^2+1)} \iff \log|y| = \log|t| - \frac{1}{2}\,\log(t^2+1) + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{ct}{\sqrt{t^2+1}}$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)t}{\sqrt{t^2+1}}$, per cui $y_p'(t) = \frac{c'(t)t}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{c(t)}{(t^2+1)^{3/2}}$, e quindi $\frac{c'(t)t}{\sqrt{t^2+1}} + \frac{c(t)}{(t^2+1)^{3/2}} = \frac{c(t)}{(t^2+1)^{3/2}} + \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} \iff c'(t) = \frac{t^2+1}{t^2} \implies c(t) = \int \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)dt = t - \frac{1}{t} = \frac{t^2-1}{t}$.
Quindi $y_p(t) = \frac{t^2-1}{\sqrt{t^2+1}}$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{t^2-1+ct}{\sqrt{t^2+1}}$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = -\frac{3}{2}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{2t^2-3t-2}{2\sqrt{t^2+1}}$, $t > 0$.

(9) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} \iff \log|y| = 2\sqrt{t} + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = ce^{2\sqrt{t}}$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)e^{2\sqrt{t}}$, per cui $y_p'(t) = c'(t)e^{2\sqrt{t}} + c(t)\frac{e^{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$, e quindi $\chi'(t)e^{2\sqrt{t}} + c(t)\frac{e^{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = c(t)\frac{e^{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} + \sqrt{t} \iff c'(t) = \sqrt{t}\,e^{-2\sqrt{t}} \implies c(t) = \int \sqrt{t}\,e^{-2\sqrt{t}}\,dt = -\left(t + \sqrt{t} + \frac{1}{2}\right)e^{-2\sqrt{t}}$. Quindi $y_p(t) = -\left(t + \sqrt{t} + \frac{1}{2}\right)$, per cui $y_{gen}(t) = ce^{2\sqrt{t}} - \left(t + \sqrt{t} + \frac{1}{2}\right)$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = \frac{3}{e^2}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = 3e^{2(\sqrt{t}-1)} - \left(t + \sqrt{t} + \frac{1}{2}\right)$, $t > 0$.

(10) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} \iff \log|y| = -\frac{1}{2} \log|t| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{c}{\sqrt{t}}$ [usando la condizione iniziale].
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)}{\sqrt{t}}$, per cui $y_p'(t) = \frac{c'(t)}{\sqrt{t}} - \frac{c(t)}{2t^{3/2}}$, e quindi $\frac{c'(t)}{\sqrt{t}} - \frac{c(t)}{2t^{3/2}} = -\frac{c(t)}{2t^{3/2}} + \sqrt{t} \iff c'(t) = t \implies c(t) = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2$. Quindi $y_p(t) = \frac{1}{2}t^{3/2}$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{c}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}t^{3/2}$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = -\frac{1}{2}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{t^2-1}{2\sqrt{t}}$, $t > 0$.

(11) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dt}{t\log t} \iff \log|y| = \log|\log t| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = c\log t$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)\log t$, per cui $y_p'(t) = c'(t)\log t + \frac{c(t)}{t}$, e quindi $c'(t)\log t + \frac{c(t)}{t} = \frac{c(t)}{t} + \frac{1}{t} \iff c'(t) = \frac{1}{t\log t} \implies c(t) = \int \frac{dt}{t\log t} = \log|\log t|$. Quindi $y_p(t) = \log t\,\log|\log t|$, per cui $y_{gen}(t) = (c + \log|\log t|)\log t$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 1$, per cui $y_{Cauchy}(t) = (1 + \log\log t)\log t$, $t > 1$.

(12) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \sin t\,dt \iff \log|y| = -\cos t + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = ce^{-\cos t}$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)e^{-\cos t}$, per cui $y_p'(t) = c'(t)e^{-\cos t} + c(t)\sin t e^{-\cos t}$, e quindi $c'(t)e^{-\cos t} + c(t)\sin t e^{-\cos t} = c(t)\sin t e^{-\cos t} + \sin t\cos^2 t \iff c'(t) = \sin t\cos^2 t e^{\cos t} \implies c(t) = \int \sin t\cos^2 t e^{\cos t}\,dt = -(\cos^2 t - 2\cos t + 2)e^{\cos t}$. Quindi $y_p(t) = -(\cos^2 t - 2\cos t + 2)$, per cui $y_{gen}(t) = ce^{-\cos t} - (\cos^2 t - 2\cos t + 2)$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 3$, per cui $y_{Cauchy}(t) = 3e^{-\cos t} - (\cos^2 t - 2\cos t + 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

(13) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{tg} t\,dt \iff \log|y| = -\log|\cos t| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = \frac{c}{\cos t}$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = \frac{c(t)}{\cos t}$, per cui $y_p'(t) = \frac{c'(t)}{\cos t} + c(t)\frac{\sin t}{\cos^2 t}$, e quindi $\frac{c'(t)}{\cos t} + c(t)\frac{\sin t}{\cos^2 t} = c(t)\frac{\sin t}{\cos^2 t} + \sin t \iff c'(t) = \sin t\cos t \implies c(t) = \int \sin t\cos t\,dt = \frac{1}{2}\sin^2 t$. Quindi $y_p(t) = \frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{\cos t}$, per cui $y_{gen}(t) = \frac{c}{\cos t} + \frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{\cos t}$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 2$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \frac{4+\sin^2 t}{2\cos t}$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(14) Determiniamo la soluzione generale dell'equazione omogenea associata, cioè $\int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{ctg} t\,dt \iff \log|y| = \log|\sin t| + \widetilde{c} \iff y_{om}(t) = c\sin t$.
Determiniamo una soluzione particolare $y_p(t) = c(t)\sin t$, per cui $y_p'(t) = c'(t)\sin t + c(t)\cos t$, e quindi $c'(t)\sin t + c(t)\cos t = c(t)\cos t + \sin t \iff c'(t) = 1 \implies c(t) = t$. Quindi $y_p(t) = t\sin t$, per cui $y_{gen}(t) = (c + t)\sin t$.
Dalla condizione iniziale otteniamo $c = 2 - \frac{\pi}{6}$, per cui $y_{Cauchy}(t) = \left(2 - \frac{\pi}{6} + t\right)\sin t$, $t \in (0, \pi)$.

$\square$

Svolgimento esercizio 3

(1) L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ ha radici $\lambda = 1$, $\lambda = 4$. Quindi, $y_{gen}(t) = a_1e^t + a_2e^{4t}$. Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 \\ -1 = y_{gen}'(0) = a_1e^t + 4a_2e^{4t}\big|_{t=0} = a_1 + 4a_2, \end{cases}$$

che ha soluzione $a_1 = \frac{5}{3}$, $a_2 = -\frac{2}{3}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \frac{5}{3}e^t - \frac{2}{3}e^{4t}$, $t \in \mathbb{R}$.

(2) L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 4 = 0$ ha radici $\lambda = \pm 2i$. Quindi, $y_{gen}(t) = a_1 \cos 2t + a_2 \sin 2t$. Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 0 = y_{gen}(0) = a_1 \\ 2 = y'_{gen}(0) = 2a_2 \cos 2t\big|_{t=0} = 2a_2, \end{cases}$$

che ha soluzione $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

(3) L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ ha radici $\lambda = 0$, $\lambda = -2$. Quindi, $y_{gen}(t) = a_1 + a_2 e^{-2t}$. Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 \\ 0 = y'_{gen}(0) = -2a_2 e^{-2t}\big|_{t=0} = -2a_2, \end{cases}$$

che ha soluzione $a_1 = 1$, $a_2 = 0$. Allora $y_{Cauchy}(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$.

(4) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ ha radici $\lambda = -2$, $\lambda = 3$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 e^{-2t} + a_2 e^{3t}$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = ae^{4t} + b$. Allora $y'_p(t) = 4ae^{4t}$, $y''_p(t) = 16ae^{4t}$, per cui $16ae^{4t} - 4ae^{4t} - 6ae^{4t} - 6b = -e^{4t} + 6$, e quindi $a = -\frac{1}{6}$, $b = -1$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 e^{-2t} + a_2 e^{3t} - \frac{1}{6}\, e^{4t} - 1$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 0 = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 - \frac{1}{6} - 1 \\ \frac{1}{3} = y'_{gen}(0) = -2a_1 e^{-2t} + 3a_2 e^{3t} - \frac{2}{3}\, e^{4t}\big|_{t=0} = -2a_1 + 3a_2 - \frac{2}{3} \end{cases}$$

cioè $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \frac{1}{2}\, e^{-2t} + \frac{2}{3}\, e^{3t} - \frac{1}{6}\, e^{4t} - 1$, $t \in \mathbb{R}$.

(5) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ ha radici $\lambda = -4$, $\lambda = 1$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 e^{-4t} + a_2 e^{t}$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = a\cos t + b \sin t + c$. Allora $y'_p(t) = -a \sin t + b \cos t$, $y''_p(t) = -a \cos t - b \sin t$, per cui $-a\cos t - b \sin t + 3(-a \sin t + b\cos t) - 4(a \cos t + b \sin t + c) = 4 + 17 \sin t$, e quindi $a = -\frac{3}{2}$, $b = -\frac{5}{2}$, $c = -1$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 e^{-4t} + a_2 e^{t} - \frac{3}{2}\, \cos t - \frac{5}{2}\, \sin t - 1$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 - \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} = y'_{gen}(0) = -4a_1 e^{-4t} + a_2 e^{t} + \frac{3}{2}\, \sin t - \frac{5}{2}\, \cos t\big|_{t=0} = -4a_1 + a_2 - \frac{5}{2} \end{cases}$$

cioè $a_1 = -\frac{1}{5}$, $a_2 = \frac{11}{5}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = -\frac{1}{5}\, e^{-4t} + \frac{11}{5}\, e^{t} - \frac{3}{2}\, \cos t - \frac{5}{2}\, \sin t - 1$, $t \in \mathbb{R}$.

(6) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 1 = 0$ ha radici $\lambda = \pm i$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = a \cos 2t + b \sin 2t$. Allora $y'_p(t) = -2a \sin 2t + 2b \cos 2t$, $y''_p(t) = -4a \cos 2t - 4b \sin 2t$, per cui $-4a \cos 2t - 4b \sin 2t + a \cos 2t + b \sin 2t = \sin 2t$, e quindi $a = 0$, $b = -\frac{1}{3}$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t - \frac{1}{3}\, \sin 2t$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 \\ 0 = y'_{gen}(0) = -a_1 \sin t + a_2 \cos t - \frac{2}{3}\, \cos 2t\big|_{t=0} = a_2 - \frac{2}{3} \end{cases}$$

cioè $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{2}{3}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \cos t + \frac{2}{3}\, \sin t - \frac{1}{3}\, \sin 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

(7) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2+2\lambda+5=0$ ha radici $\lambda=-1\pm 2i$. Quindi, $y_{om}(t)=a_1e^{-t}\cos 2t+a_2e^{-t}\sin 2t$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t)=ae^{-t}$. Allora $y_p'(t)=-ae^{-t}$, $y_p''(t)=ae^{-t}$, per cui $ae^{-t}-2ae^{-t}+5ae^{-t}=e^{-t}$, e quindi $a=\frac{1}{4}$, $b=0$. Quindi $y_{gen}(t)=a_1e^{-t}\cos 2t+a_2e^{-t}\sin 2t+\frac{1}{4}\,e^{-t}$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1=y_{gen}(0)=a_1+\frac{1}{4} \\ 0=y_{gen}'(0)=-(2a_1+a_2)e^{-t}\sin 2t+(2a_2-a_1)e^{-t}\cos 2t-\frac{1}{4}\,e^{-t}\big|_{t=0}=2a_2-a_1-\frac{1}{4} \end{cases}$$

cioè $a_1=\frac{3}{4}$, $a_2=\frac{1}{2}$. Allora $y_{Cauchy}(t)=\frac{3}{4}\,e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{2}\,e^{-t}\sin 2t+\frac{1}{4}\,e^{-t}$, $t\in\mathbb{R}$.

(8) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2+2\lambda+1=0$ ha radice $\lambda=-1$ (doppia). Quindi, $y_{om}(t)=a_1e^{-t}+a_2te^{-t}$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t)=ae^{t}$. Allora $y_p'(t)=ae^t$, $y_p''(t)=ae^t$, per cui $ae^t+2ae^t+ae^t=e^t$, e quindi $a=\frac{1}{4}$. Quindi $y_{gen}(t)=a_1e^{-t}+a_2te^{-t}+\frac{1}{4}\,e^t$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1=y_{gen}(0)=a_1+\frac{1}{4} \\ 0=y_{gen}'(0)=-a_1e^{-t}-a_2(t-1)e^{-t}+\frac{1}{4}\,e^t\big|_{t=0}=-a_1+a_2+\frac{1}{4} \end{cases}$$

cioè $a_1=\frac{3}{4}$, $a_2=\frac{1}{2}$. Allora $y_{Cauchy}(t)=\frac{3}{4}\,e^{-t}+\frac{1}{2}\,te^{-t}+\frac{1}{4}\,e^t$, $t\in\mathbb{R}$.

(9) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2+3\lambda+2=0$ ha radici $\lambda=-2$, $\lambda=-1$. Quindi, $y_{om}(t)=a_1e^{-2t}+a_2e^{-t}$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t)=ate^{-t}$. Allora $y_p'(t)=-a(t-1)e^{-t}$, $y_p''(t)=a(t-2)e^{-t}$, per cui $a(t-2)e^{-t}-3a(t-1)e^{-t}+2ate^{-t}=e^{-t}$, e quindi $a=1$. Quindi $y_{gen}(t)=a_1e^{-2t}+a_2e^{-t}+te^{-t}$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}=y_{gen}(0)=a_1+a_2 \\ \frac{1}{2}=y_{gen}'(0)=-2a_1e^{-2t}-a_2e^{-t}-(t-1)e^{-t}\big|_{t=0}=-2a_1-a_2+1 \end{cases}$$

cioè $a_1=1$, $a_2=-\frac{3}{2}$. Allora $y_{Cauchy}(t)=e^{-2t}-\frac{3}{2}\,e^{-t}+te^{-t}$, $t\in\mathbb{R}$.

(10) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2-\lambda=0$ ha radici $\lambda=0$, $\lambda=1$. Quindi, $y_{om}(t)=a_1+a_2e^t$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t)=t(at+b)=at^2+bt$. Allora $y_p'(t)=2at+b$, $y_p''(t)=2a$, per cui $2a-2at-b=t$, e quindi $a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$. Quindi $y_{gen}(t)=a_1+a_2e^t-\frac{1}{2}\,t^2-t$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1=y_{gen}(0)=a_1+a_2 \\ 1=y_{gen}'(0)=a_2e^t-1\big|_{t=0}=a_2-1 \end{cases}$$

cioè $a_1=-1$, $a_2=2$. Allora $y_{Cauchy}(t)=-1+2\,e^t-\frac{1}{2}\,t^2-t$, $t\in\mathbb{R}$.

(11) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 2\lambda = 0$ ha radici $\lambda = 0$, $\lambda = 2$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 + a_2 e^{2t}$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = ate^{2t} + t(bt + c)$. Allora $y_p'(t) = a(2t+1)e^{2t} + 2bt + c$, $y_p''(t) = 4a(t+1)e^{2t} + 2b$, per cui $4a(t+1)e^{2t} + 2b - 2\big(a(2t+1)e^{2t} + 2bt + c\big) = e^{2t} + t - 1$, e quindi $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{4}$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 + a_2 e^{2t} + \frac{1}{2}\,te^{2t} - \frac{1}{4}\,t^2 + \frac{1}{4}\,t$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 0 = y_{gen}(0) = a_1 + a_2 \\ \frac{1}{4} = y_{gen}'(0) = 2a_2 e^{2t} + (2t+1)e^{2t} - \frac{1}{2}\,t + \frac{1}{4}\big|_{t=0} = 2a_2 + \frac{5}{4} \end{cases}$$

cioè $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,e^{2t} + \frac{1}{2}\,te^{2t} - \frac{1}{4}\,t^2 + \frac{1}{4}\,t$, $t \in \mathbb{R}$.

(12) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 = 0$ ha radici $\lambda = 0$ (doppia). Quindi, $y_{om}(t) = a_1 + a_2 t$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = t^2(at^2 + bt + c) = at^4 + bt^3 + ct^2$. Allora $y_p'(t) = 4at^3 + 3bt^2 + 2ct$, $y_p''(t) = 12at^2 + 6t + 2c$, per cui $12at^2 + 6t + 2c = t^2$, e quindi $a = \frac{1}{12}$, $b = c = 0$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 + a_2 t + \frac{1}{12}\,t^2$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 \\ 1 = y_{gen}'(0) = a_2 + \frac{1}{6}\,t\big|_{t=0} = a_2 \end{cases}$$

cioè $a_1 = a_2 = 1$. Allora $y_{Cauchy}(t) = 1 + t + \frac{1}{12}\,t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

(13) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 1 = 0$ ha radici $\lambda = \pm i$. Quindi, $y_{om}(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = t(a\cos t + b\sin t)$. Allora $y_p'(t) = (a + bt)\cos t + (b - at)\sin t$, $y_p''(t) = (2b - at)\cos t - (2a + bt)\sin t$, per cui $(2b - at)\cos t - (2a + bt)\sin t + at\cos t + bt\sin t = \sin t$, e quindi $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t - \frac{1}{2}\,t\cos t$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 \\ 0 = y_{gen}'(0) = -a_1 \sin t + a_2 \cos t - \frac{1}{2}\,(\cos t - t\sin t)\big|_{t=0} = a_2 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

cioè $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \cos t + \frac{1}{2}\,\sin t - \frac{1}{2}\,t\cos t$, $t \in \mathbb{R}$.

(14) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ ha radice $\lambda = -1$ (doppia). Quindi, $y_{om}(t) = a_1 e^{-t} + a_2 te^{-t}$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = t^2(at + b)e^{-t}$. Allora $y_p'(t) = \big(-at^3 + (3a - b)t^2 + 2bt\big)e^{-t}$, $y_p''(t) = \big(at^3 + (b - 6a)t^2 + 2(3a - 2b)t + 2b\big)e^{-t}$, per cui $\big(at^3 + (b - 6a)t^2 + 2(3a - 2b)t + 2b\big)e^{-t} + 2\big(-at^3 + (3a - b)t^2 + 2bt\big)e^{-t} + (at^3 + bt^2)e^{-t} = te^{-t}$, e quindi $a = \frac{1}{6}$, $b = 0$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 e^{-t} + a_2 te^{-t} + \frac{1}{6}\,t^3 e^{-t}$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} = y_{gen}(0) = a_1 \\ -\frac{1}{2} = y_{gen}'(0) = -a_1 e^{-t} - a_2(t - 1)e^{-t} - \frac{1}{6}\,(t^3 - 3t^2)e^{-t}\big|_{t=0} = -a_1 + a_2 \end{cases}$$

cioè $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = -1$. Allora $y_{Cauchy}(t) = -\frac{1}{2}\,e^{-t} - te^{-t} + \frac{1}{6}\,t^3 e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$.

(15) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^2+2\lambda+5=0$ ha radici $\lambda=-1\pm 2i$. Quindi, $y_{om}(t)=a_1e^{-t}\cos 2t+a_2e^{-t}\sin 2t$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t)=t(ae^{-t}\cos 2t+be^{-t}\sin 2t)$. Allora $y_p'(t)=(a-at+2bt)e^{-t}\cos 2t+(b-2at-bt)e^{-t}\sin 2t$, $y_p''(t)=\big(-2a+4b-3at-4bt\big)e^{-t}\cos 2t+(-4a-2b+4at-3bt)e^{-t}\sin 2t$, per cui $\big(-2a+4b-3at-4bt\big)e^{-t}\cos 2t+(-4a-2b+4at-3bt)e^{-t}\sin 2t+2(a-at+2bt)e^{-t}\cos 2t+2(b-2at-bt)e^{-t}\sin 2t+5ate^{-t}\cos 2t+5bte^{-t}\sin 2t=e^{-t}\cos 2t$, e quindi $a=0$, $b=\frac{1}{4}$. Quindi $y_{gen}(t)=a_1e^{-t}\cos 2t+a_2e^{-t}\sin 2t+\frac{1}{4}\,e^{-t}\sin 2t$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases}1=y_{gen}(0)=a_1\\ 0=y_{gen}'(0)=-(2a_1+a_2)e^{-t}\sin 2t+(2a_2-a_1)e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{4}\,e^{-t}(-\sin 2t+2\cos 2t)\big|_{t=0}=2a_2-a_1+\frac{1}{2}\end{cases}$$

cioè $a_1=1$, $a_2=\frac{1}{4}$. Allora $y_{Cauchy}(t)=e^{-t}\cos 2t+\frac{1}{4}\,e^{-t}\sin 2t+\frac{1}{4}\,e^{-t}\sin 2t$, $t\in\mathbb{R}$.

(16) L'equazione caratteristica $\lambda^3-\lambda=0$ ha radici $\lambda=0$, $\lambda=\pm 1$. Quindi, $y_{gen}(t)=a_1+a_2e^t+a_3e^{-t}$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases}0=y_{gen}(0)=a_1+a_2+a_3\\ 1=y_{gen}'(0)=a_2e^t-a_3e^{-t}\big|_{t=0}=a_2-a_3\\ 1=y_{gen}''(0)=a_2e^t+a_3e^{-t}\big|_{t=0}=a_2+a_3,\end{cases}$$

che ha soluzione $a_1=-1$, $a_2=1$, $a_3=0$. Allora $y_{Cauchy}(t)=e^t-1$, $t\in\mathbb{R}$.

(17) L'equazione caratteristica $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$ ha radice tripla $\lambda=1$. Quindi, $y_{gen}(t)=(a_1+a_2t+a_3t^2)e^t$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases}1=y_{gen}(0)=a_1\\ 0=y_{gen}'(0)=(a_2+2a_3t+a_1+a_2t+a_3t^2)e^t\big|_{t=0}=a_1+a_2\\ 2=y_{gen}''(0)=(2a_3+a_2+2a_3t+a_2+2a_3t+a_1+a_2t+a_3t^2)e^t\big|_{t=0}=a_1+a_2+2a_3\end{cases}$$

cioè $a_1=a_3=1$, $a_2=-1$. Allora $y_{Cauchy}(t)=(1-t+t^2)e^t$, $t\in\mathbb{R}$.

(18) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^3+\lambda^2-2=0$ ha radici $\lambda=1$, $\lambda=-1\pm i$. Quindi, $y_{om}(t)=a_1e^t+a_2e^{-t}\sin t+a_3e^{-t}\cos t$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t)=ate^t$. Allora $y_p'(t)=a(t+1)e^t$, $y_p''(t)=a(t+2)e^t$, $y_p'''(t)=a(t+3)e^t$, per cui $a(t+3)e^t+a(t+2)e^t-2ate^t=5e^t$, e quindi $a=1$. Quindi $y_{gen}(t)=(a_1+t)e^t+a_2e^{-t}\sin t+a_3e^{-t}\cos t$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases}1=y_{gen}(0)=a_1+a_3\\ 1=y_{gen}'(0)=(a_1+1+t)e^t+\big((a_2-a_3)\cos t+(-a_2-a_3)\sin t\big)e^{-t}\big|_{t=0}=a_1+1+a_2-a_3\\ 0=y_{gen}''(0)=(a_1+2+t)e^t+\big((-a_2+a_3-a_2-a_3)\cos t+(a_2+a_3-a_2+a_3)\sin t\big)e^{-t}\big|_{t=0}=a_1+2-2a_2\end{cases}$$

cioè $a_1=0$, $a_2=a_3=1$. Allora $y_{Cauchy}(t)=e^{-t}(\sin t+\cos t)$, $t\in\mathbb{R}$.

(19) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^4-4\lambda^2=0$ ha radici $\lambda=0$ (doppia), $\lambda=\pm 2$. Quindi, $y_{om}(t)=a_1+a_2t+a_3e^{2t}+a_4e^{-2t}$.

Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = at^2$. Allora $y_p'(t) = 2at$, $y_p''(t) = 2a$, $y_p'''(t) = y^{(4)}(t) = 0$, per cui $-8a = 8$, e quindi $a = -1$. Quindi $y_{gen}(t) = a_1 + a_2 t + a_3 e^{2t} + a_4 e^{-2t} - t^2$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_1 + a_3 + a_4 \\ 0 = y_{gen}'(0) = a_2 + 2a_3 e^{2t} - 2a_4 e^{-2t} - 2t\big|_{t=0} = a_2 + 2a_3 - 2a_4 \\ 2 = y_{gen}''(0) = 4a_3 e^{2t} + 4a_4 e^{-2t} - 2\big|_{t=0} = 4a_3 + 4a_4 - 2 \\ 1 = y_{gen}''(0) = 8a_3 e^{2t} - 8a_4 e^{-2t}\big|_{t=0} = 8a_3 - 8a_4 \end{cases}$$

cioè $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1$, $a_4 = \frac{3}{4}$. Allora $y_{Cauchy}(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t - t^2 + e^{2t} + \frac{3}{4}e^{-2t}$, $t \in \mathbb{R}$.

(20) Risolviamo dapprima l'equazione omogenea associata. L'equazione caratteristica $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ ha radici doppie $\lambda = i$ e $\lambda = -i$. Quindi, $y_{om}(t) = (a_1 + a_2 t)\sin t + (a_3 + a_4 t)\cos t$.
Cerchiamo una soluzione particolare, dell'equazione non omogenea, della forma $y_p(t) = a$. Allora $y_p'(t) = y_p''(t) = y_p'''(t) = y^{(4)}(t) = 0$, per cui $a = 1$. Quindi $y_{gen}(t) = (a_1 + a_2 t)\sin t + (a_3 + a_4 t)\cos t + 1$.
Dalle condizioni iniziali otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y_{gen}(0) = a_3 + 1 \\ 1 = y_{gen}'(0) = a_2 \sin t + (a_1 + a_2 t)\cos t + a_4 \cos t - (a_3 + a_4 t)\sin t\big|_{t=0} = a_1 + a_4 \\ 1 = y_{gen}''(0) = a_2 \cos t - a_4 \sin t + (a_2 - a_3 - a_4 t)\cos t - (a_1 + a_4 + a_2 t)\sin t\big|_{t=0} = 2a_2 - a_3 \\ 1 = y_{gen}''(0) = -a_4 \cos t - a_2 \sin t - (2a_2 - a_3 + a_4 t)\sin t - (a_1 + 2a_4 + a_2 t)\cos t\big|_{t=0} = -a_1 - 3a_4 \end{cases}$$

cioè $a_1 = 2$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -1$. Allora $y_{Cauchy}(t) = (2 + \frac{1}{2}t)\sin t - t\cos t + 1$, $t \in \mathbb{R}$.

$\square$